DOC 1 Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire, bilan scientifique – Michel Fayol – Conférence de Consensus CNESCO

[Morceaux choisis par nos soins]

NB - Plus qu'un résumé, ce qui suit est une sélection que nous avons opérée selon deux critères : relater l'état de la recherche d'une part, se centrer sur les points les plus proches de nos préoccupations d'enseignants d'autre part. Se reporter au texte intégral fourni dans le dossier numérique (PDF) pour plus de précision. Il va de soi que dans les diverses thématiques abordées au cours de ce stage nous chercherons à mettre en cohérence ces données consensuelles et nos propositions.

I De l'intuition des grandeurs et quantités aux nombres naturels

Certains enfants apprennent précocement la suite des noms de nombres, sont capables de les réciter en allant parfois relativement loin dans la suite à 2 ans et demi ou 3 ans. Toutefois, la mise en relation avec la valeur cardinale des nombres est loin d'être établie : à 3 ans, les enfants savent donner une et deux entités, savent aussi dénombrer un et deux, mais se trompent souvent avec trois et au-delà. Ils semblent ne pas comprendre la relation entre le comptage et le cardinal.

Les capacités de discrimination intuitives (modalités visuelle et auditive pour savoir indiquer la collection la plus grande), déjà établies dans un rapport de 2 à 3 vers l'âge de 9 mois, s'améliorent entre 3 et 6 ans, passant d'un rapport de 3/4 à 4/5, sans que la valeur du rapport adulte soit atteinte (10/11).

La discrimination des grandeurs (aires) serait plus précoce que celle des quantités (collections de points). D'emblée existent d'importantes différences interindividuelles. Cette intuition apparaît négativement affectée chez certains enfants dits "dyscalculiques".

Tous les systèmes de numération comportent un lexique plus ou moins étendu associant à une valeur cardinale une dénomination et une seule (sept ; quinze). Selon les langues, cette lexicalisation porte sur des cardinalités plus ou moins importantes : de un à seize en Français, mais de un à dix en Chinois, de un à douze en Anglais.

Les systèmes verbaux de désignation utilisent une combinatoire (une syntaxe) permettant de produire une infinité de formulations plus ou moins complexes correspondant à n'importe quel cardinal. Les règles syntaxiques dépendent des cultures : Ces règles opposent des combinaisons de types additif (cent huit) et multiplicatif (huit cents).

L'organisation progressive entre trois et huit ans de la suite des noms de nombres conditionne à la fois la réalisation des activités de dénombrement et celle des opérations arithmétiques simples : addition et soustraction.

►Des noms de nombres à la désignation des quantités

Le problème soulevé par cet apprentissage doit être décomposé en trois dimensions : la perception et la discrimination des grandeurs et quantités (voir ci-dessus), l'acquisition de la suite des noms de nombres ou des symboles ayant la même fonction (voir ci-dessus), la mise en relation entre les deux, qui constitue sans doute la question cruciale.

Le développement suit un ordre précis : en premier vient le nombre "un" (vers 2 ans et demi, donner ou dénombrer un objet), puis "deux" (vers 3 ans ou 3 ans et demi), puis "trois" (vers 3 ans et demi ou 4 ans). Les enfants découvriraient ensuite le *principe cardinal* (la quantité correspond au dernier nombre énoncé) et la *fonction de successeur* : chaque nom de nombre a un successeur, lequel correspond à la quantité du précédent augmentée de un. C'est alors qu'ils pourraient élaborer une signification adulte des noms de nombres, tels "cinq" ou "six".

La capacité de reconnaître l'équivalence de deux quantités quels que soient les éléments et leurs dispositions est une compétence centrale et suppose la capacité de catégoriser comme équivalents des ensembles qui diffèrent sur de nombreuses dimensions sauf une : la cardinalité. Les enfants qui comptent le plus loin sont ceux qui reconnaissent le mieux l'équivalence des ensembles hétérogènes.

L'utilisation de la numération verbale pour déterminer le cardinal d'une collection nécessite également la compréhension du principe selon lequel le langage encode la quantité. Dans la vie quotidienne, ou lorsqu'on fait appel à une représentation mentale analogique, l'accroissement de quantité se traduit par une augmentation de longueur, de densité ou de volume. Le langage, lui, code la quantité d'une manière conventionnelle. "Six" renvoie à une quantité plus importante que "cinq", mais "six" ne comporte en lui-même aucun indice de ce qu'il évoque un cardinal supérieur à "cinq".

Cela nécessite donc que les noms de nombres évoquent les valeurs cardinales dans la mémoire, et qu'ils le fassent de manière précise et automatique, sauf à énoncer systématiquement la suite des noms de nombres. Cette évocation constitue sans doute le problème majeur auquel se trouvent confrontés les enfants de deux à quatre ou cinq ans.

►Le dénombrement : la quantification par comptage

La quantification précise des grandes quantités nécessite le recours au dénombrement, qui associe l'énonciation de la suite verbale des noms de nombres et le pointage un à un des entités à dénombrer. La mise en œuvre du dénombrement nécessite la coordination de deux activités synchronisées : d'une part une activité verbale de remémoration et d'énonciation des noms de nombres (la comptine) ; d'autre part, une activité motrice de pointage digital ou visuel qui assure que tous les éléments de l'ensemble à dénombrer ont été traités chacun une fois et une seule.

Cinq principes commandent la capacité de dénombrement, que seulement environ 50 % des élèves maîtriseraient tous en fin de grande section maternelle :

- ordre stable : les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre.

- stricte correspondance terme à terme (celui-ci est acquis par quasi tous fin GS, mais c'est le seul)
- principe cardinal : le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le nombre total.
- principe d'abstraction : toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble.
- non pertinence de l'ordre : l'ordre dans lequel on compte les éléments n'affecte pas le résultat du comptage.

Les enfants n'établissent que tardivement la relation entre comptage (une procédure) et quantification (cardinal).

II L'apprentissage et l'utilisation de la numération décimale

Relativement peu de recherches ont porté sur l'apprentissage du système numérique écrit en chiffres arabes : dix symboles et un principe, la notation positionnelle qui donne lieu à un apprentissage systématique. Les affichages numériques désormais nombreux dans la vie courante rendent probable une acquisition partielle dès la moyenne section maternelle. La recherche confirme que l'apprentissage des chiffres arabes et leur mise en relation avec les formes verbales et les quantités correspondantes est à la portée des enfants de l'école maternelle (jusqu'à 9 donc).

►Au delà de 9

Le passage des nombres à un chiffre aux nombres à deux puis trois puis n chiffres nécessite la compréhension de la valeur positionnelle des chiffres qui repose sur plusieurs connaissances : (a) la valeur d'un chiffre dépend de la place qu'il occupe dans le nombre, un vaut 1 dans la position la plus à droite mais 10 dans la suivante plus à gauche, puis 100 dans la suivante ; (b) la valeur de position croît de droite à gauche par puissances de 10 ; (c) la valeur d'un chiffre s'obtient en multipliant la valeur de ce chiffre (de 0 à 9) par la puissance de la base correspondant à la position qu'il occupe ; (d) la valeur totale est égale la somme des valeurs représentées par chaque chiffre.

C. Kamii a demandé à des enfants et à des adultes de dessiner seize roues puis d'indiquer le nombre en chiffres arabes (16). Elle leur a ensuite demandé la quantité à laquelle renvoient respectivement le 6 puis le 1. Les réponses exactes ne surviennent que chez 12 % des enfants de 7 ans, 42 % des 9 ans et 78 % des élèves de lycée.

Les obstacles surviennent au moment où s'effectue le passage de 10. Ils sont particulièrement importants pour les enfants occidentaux : en français, les mots onze, douze, vingt ne sont pas explicites, alors qu'ils le sont en Asie ("dix-un", "dix-deux", "deux-dix"). Pire encore avec soixante-dix et quatre-vingt (84 écrit 4204) et avec les zéros intercalés.

La difficulté du transcodage résulte de deux dimensions : le nombre de chiffres et la longueur phonologique des expressions numériques (évaluée en nombre de syllabes), ce qui suggère que les problèmes rencontrés relèvent soit de l'incompréhension du fonctionnement de la notation de position, soit de limitations de la mémoire de travail.

Une attention plus grande et plus prolongée portée aux compositions et décompositions (avec des blocs correspondant à la base dix et à ses multiples : plaques de 100, etc.) et à leur mise en relation avec les configurations de chiffres serait souhaitable.

►Fractions et décimaux

Le niveau de performances évalué en classe de sixième dans ce domaine est corrélé avec les réussites ultérieures en mathématiques. Bien que les fractions soient introduites en CM1, de nombreux adultes et élèves du second degré confondent les propriétés des fractions avec celles des nombres entiers : tous les nombres entiers sont représentables par une seule écriture en chiffres, ont un successeur unique, ne diminuent jamais avec la multiplication et n'augmentent pas avec la division. Ces propriétés diffèrent de celles des nombres décimaux et des fractions. Toutefois, les fractions, comme les autres nombres, expriment une grandeur susceptible d'être représentée sur une ligne numérique. Les erreurs sont liées à 4 ruptures conceptuelles :

1. La détermination de la "taille" d'une fraction ne dépend ni du seul numérateur ni du seul dénominateur, pas plus que la "longueur du nombre décimal" n'est un indice de la "taille" (2,6 est plus grand que 2,5679).
2. Les opérations avec les naturels conduisent à attendre qu'additionner et multiplier produisent des augmentations, soustraire et diviser des diminutions. Or, cela n'est plus que partiellement vrai avec les rationnels.
3. Alors que les naturels n'ont qu'une seule manière d'être représentés, les rationnels peuvent l'être de différentes manières : 0,75 ; 0,750 ; 3/4 ; 75/100 ; 9/12, etc. ;
4. Alors que les naturels sont discrets, une infinité de rationnels peut être intercalée entre deux nombres rationnels.

D'une manière générale les schémas cognitifs des acquisitions conceptuelles et opératoires dans ce domaine sont peu documentés par la recherche.

III Les opérations

► Résolution de problèmes et opérations

Les opérations consistent à utiliser et combiner des symboles suivant des règles (addition, soustraction, etc.) plutôt que de réaliser des transformations effectives (ajouter, enlever, partager...) portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles. À l'issue des traitements symboliques, le résultat obtenu doit être équivalent à celui auquel aurait abouti la manipulation des entités concrètes. Les enfants doivent découvrir que la manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application concrète des transformations. Il leur faudra ensuite comprendre que la manipulation des symboles autorise des "libertés" de traitement facilitant la résolution des opérations.

La mise en œuvre des quatre opérations nécessite la prise en compte de trois dimensions :

- chaque opération s'applique dans des conditions particulières, parfois intuitivement simples (addition pour traiter un ajout, division pour un partage en collections) mais quelquefois complexes. Des connaissances conceptuelles doivent donc être mobilisées pour appréhender les situations et sélectionner la ou les procédures pertinente(s).
- cette mise en œuvre s'appuie sur la connaissance de procédures, suites d'étapes à appliquer en suivant rigoureusement l'ordre et les règles, comme pour la résolution des additions ou des multiplications à retenues.
- elle nécessite aussi la connaissance de certains faits (par exemple, que 4 + 4 font 8 ou que 3 x 4 = 12) .

Les relations entre ces trois composantes - conceptuelle, procédurale et factuelle - sont complexes et pas très bien documentées, notamment en ce qui concerne l'impact des pratiques pédagogiques.

► Les opérations simples

Les enfants de 3 à 6 ans résolvent mieux les situations-problèmes lorsque celles-ci sont facilement "imaginables" (c'est-à-dire simulables par des modèles mentaux), par exemple lorsqu'elles portent sur de petites quantités (inférieures à 3) et lorsqu'elles leur sont présentées sous format non-verbal (en effectuant les transformations sous leurs yeux) plutôt que verbalement (sous forme de petites histoires).

L'arithmétique intuitive des enfants de l'école maternelle repose sur une représentation analogique des situations-problèmes : ils ne font pas appel aux opérations, mais simulent mentalement des situations et manipulent pour cela des modèles mentaux, ce qui conduit à s'interroger sur le passage des transformations en acte aux opérations arithmétiques. Trois propriétés seront progressivement assimilées :

- l'inversion addition-soustraction (a + b = c donc a = c - b) et multiplication-division (a : b = c donc a = bc)
- la commutativité de l'addition (a + b = b + a) et de la multiplication (ab = ba)
- l'associativité de l'addition et de la multiplication (a + (b + c) = (a + b) + c).

►Les additions

Vers 5 ans les enfants disposent d'un éventail de procédures différentes de niveau de développement croissant :

- comptage avec des entités physiquement manipulables.
- comptage mental plus ou moins accompagné de l'usage des doigts.
- surcomptage à partir du premier nombre fourni (2 + 4 = 2;3;4;5;6).
- surcomptage à partir du plus grand des deux (2 + 4 = 5;6), procédure qui nécessite le recours à la commutativité.
- récupération directe en mémoire du résultat (3+2=5) qui varie selon les nombres.

En CM1 7+8 n'est récupéré que par 1 enfant sur 6 environ : tout ceci est donc très progressif.

► Les soustractions

Comme pour l'addition, les enfants utilisent d'abord des aides externes pour résoudre les problèmes de retrait ou de diminution puis intériorisent peu à peu les procédures. Pour m-n =?, ils partent soit de m et décrémentent du nombre de pas correspondant à n (5 - 2 = 5;4;3 parfois confondu 5;4) soit de n et incrémentent jusqu'à m, en minimisant le nombre de pas à compter.

La récupération en mémoire est rare pour la résolution des soustractions, et souvent par récupération de l'addition correspondante : le traitement de 12 - 8 =? s'appuie sur l'addition 8 + 4 = 12. A titre d'exemple 9-4 est récupéré par moins de 10 % des élèves de CE2, sans préjuger de la voie suivie.

► Les multiplications

La multiplication peut être vue comme une addition itérée (4 + 4 + 4 + 4 + 4) ou comme une relation entre deux quantités, avec ici deux possibilités : s'appuyer sur les suites de multiples (3, 6, 9, etc.) ou mémoriser les tables. A ce sujet, le processus de récupération s'opère quand, dans un premier temps plusieurs produits correspondant aux deux opérandes sont activés puis, dans un deuxième temps, seul le résultat correct est sélectionné, les autres étant inhibés, avec des confusions d'autant plus nombreuses que les nombres sont grands.

► Les divisions

Si 15 enfants doivent être répartis sur 5 tables, la situation est dite partitive (combien d'éléments par partie). Si 15 enfants doivent être répartis à raison de 5 par table et qu'il faut déterminer le nombre de tables, la situation est dite quotitive (combien de parties).

Plusieurs stratégies ont été identifiées : additions itérées (9 + 9 + 9 jusqu'à obtenir 63), majoritaire en CM1 ; récupération en mémoire du résultat, essentiellement relevée avec les petites divisions (6 : 2 par exemple) ; référence très fréquente à la multiplication correspondante (24 : 6 donc 6x = 24).

► Les opérations posées

Les enfants peuvent inventer des procédures erronées très difficiles à éradiquer une fois installées mais qui traduisent le fait que les élèves n'ont pas compris certaines des bases de la numération écrite et qu'ils élaborent des sortes d'algorithmes qui leur sont propres et qui ressemblent partiellement à ceux qui sont pertinents. Certaines expériences (Fuson) montrent que l'apprentissage gagne à être accompagné de manipulations/modélisations du système décimal (barres de 10, plaques de 100...)