I- *Généralités* :

1° Définition :

Une transformation f du plan P est une bijection de P dans P, c'est-à-dire :
$\forall m \in P,\ \exists! M \in P\ :\ f(M) = m$ La bijection reciproque de f est notée f^{-1}

2° Propriétés :

Soient *f, g et h des transformations*

a. $f = g \iff \forall M \in P\ :\ f(M) = g(M)$

b. $f \circ g$ et $g \circ f$ ne sont pas necessairement égales.

c. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

d. $f \circ g = id_P \iff g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$

e. $h = g \circ f \iff g = h \circ f^{-1}$ et $f = g^{-1} \circ h$

f. $h = s \circ f \iff f = s \circ h$ où s est une reflexion

g. $h = t_{\vec{u}} \circ f \iff f = t_{-\vec{u}} \circ h$

3° Transformations vectorielles associées :

On appelle transformation vectorielle associée à la transformation ponctuelle f, la bijection qui à tout vecteur $\overrightarrow{MN}$ associe le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ où $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$.

II- *Transformations usuelles*

1° Translation

a) Définition :

La translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b) Propriétés :

✓Pour tous points distincts A et B il existe une translation et une seule qui transforme A en B, son vecteur est $\overrightarrow{AB}$

✓ $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

✓ Une translation transforme une droite en une droite parallèle

c) Ecriture complexe :

L'ecriture complexe de la translation t dont le vecteur est d'affixe z_o est $z' = z + z_o$

www.mauribac.id.st

2°Homothétie

a) Définition :

L'homothétie h de centre I et de rapport k (un réel non nul) est la transformation définie par $h(I)=I$ et $\forall M\in P\ \ h(M)=M'$ tel que $\overrightarrow{IM'}=k\cdot\overrightarrow{IM}$

NB : si k = 1 alors h est l'identité et si k = - 1 alors h est la symetrie de centre I.

b) Propriétés :

✓ Soit h une transformation et k un réel non nul différent de 1. Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h on a : h est une homthétie ssi $\overrightarrow{M'N'}=k\cdot\overrightarrow{MN}$

✓ Pour tous points distincts et algnés A, B, C , il existe une et une seule homothétie h de centre A transformant B en C (son rapport est $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$)

✓ ABCD étant un trapèze tel que (AB) $\parallel$(CD) alors ils existent deux homothéties de rapports opposés transformant le segment [AB] en [CD]

✓ Pour une homothétie, le centre, un point et son image sont alignés

✓ L'homothétie transforme une droite en une droite parallèle

✓ L'homothétie conserve les angles orientés et multiplie la distance par la valeur absolue du rapport k et l'aire par son carré.

✓ La reciproque de h(I ;k) est l'homothétie de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$

c) Ecriture complexe :

L'ecriture complexe de l'homothétie de rapport k ,de centre I d'affixe z_o est

$z'-z_o=k(z-z_o)$

Reciproquement :

Toute transformation d'ecriture complexe $z'=az+b$ où $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ est une homothétie de rapport a et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$

3° Reflexion

a) Définition :

La reflexion (ou symetrie orthogonale) d'axe D est la transformation notée S_D qui laisse invariant tout point de D et transforme tout autre point M du plan en un point M' tel que D soit la médiatrice du segment $[MM']$

www.mauribac.id.st

b) Propriétés :

✓ Pour tous points distincts A et B, il existe une reflexion et une seule transformant A en B, son axe est la médiatrice de $[AB]$

✓ Toute reflexion est la reciproque d'elle-même (donc elle est involutive)

✓ La reflexion conserve la distance et l'aire mais elle transforme un angle orienté en son opposé

4° Rotation

a) Définition :

La rotation de centre I et d'angle α est la transformation qui laisse invariant le point I et transforme tout point M distinct de I au point M' tel que : $\begin{cases} IM' = IM \\ \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) = \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

b) Propriétés

✓ R est une transformation (qui associe à tous points distincts M et N les points M' et N') et α un réel non nul. R est une rotation d'angle α ssi $\begin{cases} M'N' = MN \\ \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right) = \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

Le centre de cette rotation est à l'intersection des médiatrices des segments $[MM']$ et $[NN']$

✓ La reciproque de la rotation de centre I et d'angle α est celle de même centre et d'angle $-\alpha$

c) Ecriture complexe :

L'ecriture complexe de la rotation de centre I, d'affixe z_o et d'angle α est :

$z' - z_o = e^{i\alpha}(z - z_o)$

5° Propriétés Communes

✓ L'image d'une droite est une droite

✓ L'image d'un cercle de centre O est un cercle de centre O'

✓ L'image d'un segment [AB] est le segment [A'B'] où A' est l'image de A et B' celui de B.

✓ Les transformations conservent le parallèlisme, l'orthogonalité, le barycentre, le contact et transforme un parallèlogramme en un parallèlogramme.

www.mauribac.id.st

III- Composée des transformations :

Composé	Nature	Commutativité
de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$	Translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$	commutative
de deux homothéties de même centre	Homothétie de centre I et de rapport le produit des rapports	commutative
de deux homothéties de centres distincts I et J (de rapports k_1 et k_2)	☞ Translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$ si $k_1k_2 = 1$ ☞ homthétie de rapport k_1k_2 et de centre aligné avec I et J si $k_1k_2 \neq 1$	non commutative
d'une homothétie et d'une translation	Soit h une homothétie de centre I et de rapport $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul, alors $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k et dont les centres (respectivement J et K) sont des points de la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$, ($\overrightarrow{IJ} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$)	non commutative
de deux réflexions d'axes parallèles D et **D′**	$S_{D'} \circ S_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$, où A est un point quelconque de D et A' son projeté orthogonal sur D'	non commutative
de deux réflexions d'axes D et **D′** secants en O	$S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u},\vec{u}')$ où $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs directeurs de D et D'	non commutative
de deux rotations de même centre (d'angles α et α')	Rotation de même centre et dont l'angle est la somme des angles	commutative
de deux rotations de centres distincts (d'angles α et α')	☞ Translation si $\alpha+\alpha' = 2k\pi$ ☞ Rotation d'angle $\alpha+\alpha'$ si $\alpha+\alpha' \neq 2k\pi$	non commutative
d'une rotation et d'une translation	La composée d'une rotation d'angle α, non nul, et d'une translation est une rotation d'angle α	non commutative

Conséquences : Décomposition

d'une translation	Toute translation t de vecteur non nul $\vec{u}$ est décomposable en deux reflexions d'axes paralléles, dont l'un est chosis arbitrairement et l'autre est son image par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$ ou $-\frac{1}{2}\vec{u}$
d'une rotation	Toute rotation de centre O et d'angle α non nul est décomposable en deux reflexions d'axes sécants en O, l'un des axes peut être choisis arbitrairement (passant par O) et l'autre est son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{1}{2}\alpha$ ou $-\frac{1}{2}\alpha$

www.mauribac.ld.st

IV- *Isométrie planes*

1° Définition :

On appelle isometrie toute transformation qui conserve la distance.

2° Propriétés :

a. La composée de deux isometries est une isometrie
b. La reciproque d'une isometrie est une isometrie
c. Si le point A est invariant par l'isometrie f alors A appartient à la médiatrice de tout segment $[MM']$ où $M' = f(M)$
d. Si une isometrie f admet deux points invariants disincts A et B alors tous les points de la droite (AB) sont invariantspar f.

3° Isométries et points invariants :

Nbre de pts invariants	Nature de l'isometrie
Aucun	Translation (de vecteur non nul) ou symetrie glissante
un unique point A	Rotation de centre A (d'angle non nul)
Au moins deux points distyincts A et B	Reflexion d'axe (AB) ou l'identité
Au moins 3 points non alignés	l'identité

4° Classification :

Il existe deux types d'isométrie les déplacements et les antidéplacements

a) Déplacement

✍ Définition :

Un déplacement est une isometrie qui conserve les angles orientés (alors c'est une translation ou une rotation)

✍ Proprietés :

- La reciproque d'un déplacement est un déplacement
- La composée de deux déplacement est un déplacement
- Soient A, B, C, D quatre points du plan tels que $AB = CD \neq 0$, il existe un déplacement f et un seul transformant A en C et B en D.

- f est une translation ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ alors f est une rotation d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$

www.mauribac.id.st

b) Anti-déplacement

Définition :

Un antidéplacement est une isometrie qui transforme les angles orientés en leurs opposés (alors c'est une réflexion ou une symetrie glissante)

Proprietés :

- La reciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement
- La composée de deux antidéplacement est un déplacement
- La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement
- Soient A, B, C, D quatre points du plan tels que $AB = CD \neq 0$, il existe un antidéplacement f et un seul transformant A en C et B en D.

5° Symetrie glissante

a) Définition

Une *symetrie glissante* est, par définition, le produit $t_{\vec{u}} \circ S_D$ d'une réflexion et d'une translation, le vecteur de la translation étant non nul et dans la direction de l'axe de la réflexion. Le produit $t_{\vec{u}} \circ S_D$ s'appelle *forme réduite* de la symetrie glissante.

b) Propriétés

- La forme réduite d'une symetrie glissante est commutative : $t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur non nul de D
- Une symetrie glissante est un antidéplacement (produit d'un déplacement et d'un antidéplacement)
- La forme réduite d'une symetrie glissante ne peut pas se simplifier : une symetrie glissanten'est ni une translation, ni une rotation, ni une réflexion.

c) Eléments caractéristiques

La forme réduite d'une symetrie glissante $t_{\vec{u}} \circ S_D$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur non nul de D est unique. $\vec{u}$ et *D* s'appellent le vecteur et l'axe de la symetrie glissante; ce sont les éléments caractéristiques de la symetrie glissante.

d) Eléments Invariants

Une symetrie glissanten'admet pas de points fixes. L'axe d'une symetrie glissanteest une droite globalement invariante par la symetrie glissante, et aucune autre droite du plan n'est invariante par la symetrie glissante.

www.mauribac.id.st

6° Isométries vectorielles associées

a) Définition :

Soit f une isometrie du plan, il existe une application F, de l'ensemble des vecteur V dans lui-même, telle que pour tous points A et B $F(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. F est une bijection de V dans V et s'appelle l'isometrie vectorielle associée à f.

b) Isométries vectorielles associées aux isométries usuelles :

- **Translation** : l'isometrie vectorielle associée à toute translation est l'identité vectorielle

- **Rotation** : la rotation vectorielle associée à la rotation d'angle α est l'application R définie par : $R(\vec{0}) = \vec{0}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul $R(\vec{u}) = \vec{u}'$ tel que $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') = \alpha \quad [2\pi]$

- **Reflexion** : Soit D une droite $\vec{u}$ un vecteur de D et $\vec{v}$ un vecteur non nul orthogonal à D. L'isometrie vectorielle S associée à la reflexion d'axe D est définie par : $\begin{cases} S(\vec{u}) = \vec{u} \\ S(\vec{v}) = -\vec{v} \end{cases}$

c) Propriétés :

- Si F et G sont les isometries vectorielles associées aux isometries ponctuelles f et g, alors $F \circ G$ est l'isometrie vectorielle associée à $f \circ g$

- Si F est l'isometrie vectorielle associée à f alors la reciproque F^{-1} de F est l'isometrie vectorielle associée à la recdiproque f^{-1} de f.

- F et G étant les isometries vectorielles associées à f et g respectivement
  - $F = id_V \Leftrightarrow$ f est une translation
  - $F = G \Leftrightarrow g = t \circ f$ ou $g = f \circ t$ où t est une translation

- f est un déplacement ssi son isometrie vectorielle associée est une rotation vectorielle

- toute transformation vectorielle est linéaire (en particulier les isometries vectorielles)

- Toute isometrie vectorielle conserve le produit scalaire $F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- Dans une base orthonormée on a

$$\det(F(\vec{u}), F(\vec{v})) = \begin{cases} \det(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si f est un déplacement} \\ -\det(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si f est un anti-déplacement} \end{cases}$$

www.mauribac.id.st