Unité de Formation et de Recherche

Sciences Appliquées et Technologie

Mémoire de Maitrise

Mathématiques Appliquées Informatique et Finance

Thème: Le modèle de Markowitz et détermination d'un portefeuille optimal.

Présenté par : Fatou Dioffé Bâ & Abdoulaye Wade

Sous la direction de : Pr Abdou Kâ Diongue

Année universitaire 2011/2012

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I/ Le Modèle de Markowitz

1 Les hypothèses du modèle de Markowitz

1.1.Les hypothèses relatives aux actifs financiers

1.2.Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

2 Présentation du modèle de Markowitz

2.1. Rentabilité et risque

a.La rentabilité

b. Le risque

2.2. L'approche espérance - variance

a. L'espérance mathématique : mesure de la rentabilité espérée

b. La variance : outil statistique d'analyse du risque

II/ Portefeuille Optimal : Optimisation d'un portefeuille

1 La diversification

1.1. Portefeuille composé de deux actions

1.2. Portefeuille composé de "n" actions

1.3. Limites de la diversification

a. Limite théorique

b. Limite pratique

2 La frontière efficiente

2.1. Le concept de choix de portefeuille optimal

2.2. La théorie du choix de portefeuille optimal

2.3. Limites du modèle de Markowitz

III/ : Cas pratique

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

INTRODUCTION

Le marché financier est un lieu de rencontre entre l'offre et la demande des actifs financiers où les investisseurs interviennent et ce par le biais de leurs portefeuilles. L'accès à ce marché les oblige à supporter un risque de sur ou sous évaluation de leurs actifs.

Ainsi, selon la théorie de rationalité avancée par Markowitz, les agents ont pour but ultime de combiner un ensemble d'actifs ayant une rentabilité maximale avec un niveau de risque donné ou ce qui revient de même un risque minimal pour un niveau de rentabilité donné.

Plusieurs théoriciens se sont penchés sur l'analyse et la modélisation de ces deux grands paramètres de mesure de performance de portefeuille. A cet effet, Markowitz est classé comme le premier modélisateur de la relation « Risque / Rentabilité ». Ainsi le modèle de Markowitz devient l'outil le plus préconisé par les opérateurs et ce grâce à son opérationnalité et sa technicité.

Mais au cours des années, les praticiens ont reconnu les limites de ce modèle et ils ont développé d'autres pouvant modéliser le mieux possible la relation « Risque/Rentabilité ». Ainsi, les recherches universitaires développées à l'origine par Markowitz en 1950 seront poursuivies par Fama et Lintner et aboutiront au modèle de ß ou Modèle de Fixation de Prix d'un Actif Financier (Capital Asset Pricing Model ou CAPM) de William Sharpe en 1970.

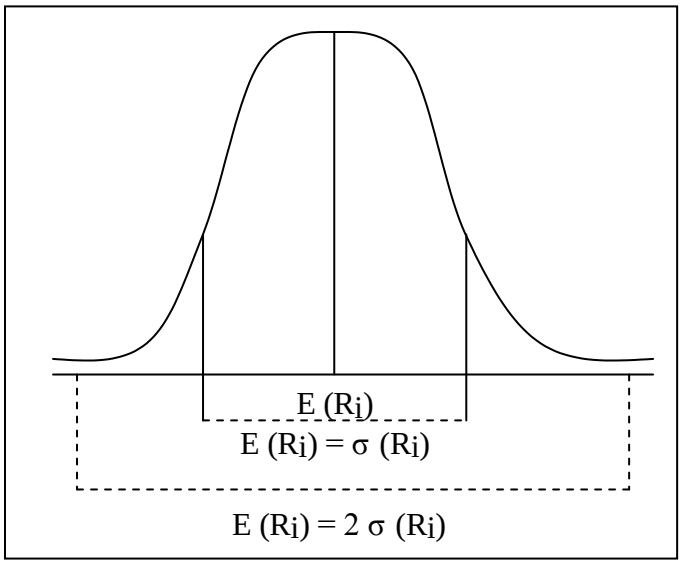
Donc, le présent rapport présentera une synthèse du modèle de base connu sous le nom de «Modèle de Markowitz », et essayera d'exposer les fondements et les apports de ce modèle en matière d'optimisation de portefeuille pour enfin terminer avec une approche critique. Le sujet sera traité en deux parties composées chacune de deux chapitres : la présentation du modèle de Markowitz et la détermination du portefeuille efficient, et en une troisième partie où nous appliquerons le modèle sur les données du CAC 40. Le premier chapitre énumérera les fondements théoriques du modèle de Markowitz, à savoir les hypothèses relatives aux actifs financiers et aux investisseurs, le second chapitre présentera les composantes du modèle, la rentabilité et le risque et leurs outils de mesure, le troisième chapitre, quant à lui, traitera du principe de la diversification, comme facteur limitatif du risque, et de ses limites, et enfin le quatrième chapitre sera consacré à la frontière efficiente.

I/ Le modèle de Markowitz

1. Les hypothèses du modèle de Markowitz

1.1 Les hypothèses relatives aux actifs financiers

Hypothèse 1 :
Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque : le rendement d'un actif financier pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale, c'est- à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par deux paramètres, à savoir l'espérance mathématique du rendement et l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement.



Avec : E (R_i) = espérance mathématique du rendement
σ (R_i) = écart-type de la distribution de probabilité du rendement
R = symbolise le (taux du) rendement
i = représente un actif financier quelconque.

Le rendement sur investissement(ou,plus brièvement, rendement est défini comme l'accroissement de la fortune initiale que cherche à maximiser l'investisseur. Le rendement correspond en temps discret à la relation $r_t = (P_t - P_{t-1}) + C_t$ où :

r_t = rendement de l'actif financier pour la période (se terminant au temps) t

P_t = prix de marché au temps t de l'actif financier

C_t = revenu liquide attaché à la détention de l'actif financier durant la période (se terminant au temps) t.

Hypothèse 2 :
Les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles.

1.2 Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

Hypothèse 1 :
Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de probabilité du rendement.

Hypothèse2 :
Les investisseurs sont rationnels : bien que leur fonction de préférence soit purement subjective, ils opèrent, en référence à celle-ci, des choix strictement transitifs.

Hypothèse 3:
Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période.
Cette simplification, qui peut paraître exagérée, permet de mettre en œuvre un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

2. Présentation du modèle de Markowitz

Le problème posé par Markowitz est la recherche d'un portefeuille qui minimise la variance du rendement du portefeuille pour un niveau d'espérance de rentabilité donné. Ce portefeuille est dit efficace, il a l'espérance de rentabilité la plus forte parmi les portefeuilles qui ont la même variance de rentabilité que lui. L'ensemble de tous les portefeuilles efficaces constitue la frontière efficace, encore appelée frontière efficiente de Markowitz (Prix Nobel d'économie en 1990), qui la dériva en 1952 et la généralisa en 1959.

2.1 Rentabilité et risque

La théorie financière met l'accent dans le cadre de la gestion de portefeuille sur deux critères essentiels, à savoir, la rentabilité et le risque.

a. La rentabilité

Le concept de rentabilité a des acceptations différentes selon les investisseurs.
Quand nous parlons de la rentabilité obtenue par un investisseur sur une action, nous nous référons non seulement au dividende net que lui rapporte ce titre, mais aussi, à la plus-value éventuelle qu'il y prélève lors de la revente des actions. Ainsi, le taux de rentabilité comprend à la fois, le rendement ou le taux de rendement (dividende net rapporté au cours de l'action), et la plus-value (ou moins value) en capital rapportée au cours d'achat de l'action.

Le rendement est défini par la relation : $R_t = (P_t - P_{t-1}) + C_t$

Le revenu C_t est supposé perçu au temps t, ou, s'il est perçu entre $(t-1)$ et t, il est supposé ne pas être réinvesti avant le temps t. Le prix de marché au temps $(t-1)$ est une valeur "ex-coupon" c'est-à-dire une valeur enregistrée immédiatement après (le détachement du coupon donnant à) la perception, au temps $(t-1)$, du revenu liquide afférant à la période $(t-1)$. Sur le plan empirique, l'hypothèse de non réinvestissement jusqu'à la période élémentaire de temps utilisée est courte (un mois maximum), afin d'éviter des distorsions statistiques trop importantes dans le traitement des données chronologiques. Pour faciliter les comparaisons entres investissements, nous utilisons une mesure exprimée en termes relatifs le "taux de rentabilité" ou "rate of return" défini assez logiquement par :

$$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$$ Où r_t est le taux de rentabilité pour la période t.

b. Le risque

L'investissement en valeurs mobilières constitue le sacrifice d'un avantage immédiat ou, une absence de consommation immédiate en échange d'avantages futurs.
Dans la mesure où le présent est connu avec certitude, l'investissement en valeurs mobilières constitue l'échange d'un avantage certain et immédiat contre un avantage futur et incertain.
Ainsi, le risque d'un actif financier pour un investisseur, peut être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future. L'objectif de tout investisseur étant de réaliser une certaine rentabilité sur les capitaux qu'il gère. Cependant, l'obtention de celle-ci n'est pas certaine à l'avance.
La rentabilité réalisée (ex-post) est plus ou moins différente de celle espérée (ex-ante). Ainsi, on peut assimiler le risque d'un investissement à la dispersion ou variabilité de sa

rentabilité autour de la valeur anticipée. Cette variabilité est mesurée le plus souvent par l'écart type (ou identiquement son carré: la variance).

2.2 L'approche espérance - variance

a. L'espérance mathématique: mesure de la rentabilité espérée

Placé dans un univers incertain, l'investisseur ne peut pas calculer d'avance la rentabilité, car la valeur du titre en fin de période est aléatoire, ainsi que dans certain cas, la rémunération perçue durant la période.
L'investisseur utilise alors, une rentabilité espérée qui est la moyenne des rentabilités possibles pondérées par leur possibilité de réalisation.

b. La variance : outil statistique d'analyse du risque

Intuitivement, on conçoit que, plus le risque d'un titre financier n'est élevé, plus son taux de rentabilité ne variera.
Si le détenteur d'obligations du trésor est assuré de toujours percevoir ses coupons, il est loin d'en être de même pour l'actionnaire d'une société qui intervient dans un -secteur pré potentiel : il pourra perdre ou gagner.

II/ Portefeuille optimal : Optimisation d'un portefeuille

La majorité des transactions boursières concernent le contenu des "portefeuilles de titres" (Security portfolio) qui sont l'ensemble des titres qu'un acteur du marché peut détenir. Gérer un portefeuille consiste donc (le plus classiquement) pour un gestionnaire à chercher un retour sur investissement maximal pour le client tout en minimisant les risques.

Les "titres financiers" (Financial Security) se dérivent sous la forme d'actions, d'obligations, d'options de devises et de matières premières tous appelés plus généralement "produits financiers" ou encore "actifs financiers". En langage courant, le concept de portefeuille évoque la détention d'un ensemble de titres (actions, obligations….) afin de faire fructifier l'épargne ayant servi à son acquisition.

Actif sans risque : Titre offrant un Taux de rentabilité parfaitement certain sur l'horizon de décision de l'investisseur. Ex : Emprunt d'état, obligation émise par le gouvernement, Bon du trésor …

Actif risqué : Titre offrant une espérance de rentabilité avec un niveau d'incertitude donné.

1. La diversification

La maximisation de rentabilité exige une gestion minutieuse des risques et cette dernière se fait à base de la diversification. La diversification stipule le mixage d'un portefeuille d'actifs entre ceux risqués ou bien les combiner avec d'autres sans risque. C'est l'investissement dans différentes classes d'actifs ou dans différents secteurs, cette diversification ne signifie pas seulement détenir beaucoup d'actifs.
Par exemple, si vous détenez 50 titres liés au secteur Informatique, votre portefeuille n'est pas diversifié. Par contre, si vous détenez 50 titres qui sont éparpillés parmi 20 différentes industries, vous êtes en possession d'un portefeuille diversifié.

1.1 Portefeuille composé de deux actions

On suppose qu'un actionnaire dispose de deux actions A et B dont les caractéristiques

sont:
-Une rentabilité mesurée par l'espérance (de A et B) ;
-Un risque mesuré par l'écart-type (de A et B).
Cet actionnaire investit en plaçant α actions A et 1-α actions B, ce qui donne le portefeuille suivant :
P = α .A + (1-α).B
Ceci permettra de réaliser une rentabilité comprise entre la rentabilité des deux actifs et un risque moindre.
L'espérance de ce portefeuille sera :

E(rp) = α.E(ra) + (1-α).E(rb)

Donc la rentabilité espérée de ce portefeuille est la moyenne pondérée des deux rentabilités espérées des deux actions qui le composent.
La variance, quant à elle, est calculée de la manière suivante :
$V(rp) = \alpha^2.V(ra) + (1-\alpha)^2.V(rb) + 2\alpha.(1-\alpha).\ cov\ (ra,rb)$
Avec :

cov (ra,rb) = ρ . σa . σb

Et « ρ » est le coefficient de corrélation. La nature de la relation entre les actifs risqués est le signe de ρ. Ce dernier peut prendre une valeur entre -1 et 1. La signification de ce coefficient peut être faite comme suit :
- Si ρ = 1 : les rentabilités des deux actifs sont parfaitement corrélées. Le mixage, dans ce cas, augmente davantage le risque encouru.
- Si ρ = 0 : Il n'y a aucune corrélation entre les rentabilités des deux actifs. Donc, le risque encouru est la somme des risques des deux actifs pondérés par leurs proportions.
- Si ρ = -1 : les rentabilités des deux actifs évoluent inversement l'une de l'autre. Dans ce cas extrême qui ne se réalise pas sur les marchés financiers, il est possible de constituer un portefeuille dénué du risque. Ainsi, la diversification permet une réduction du risque dès que le coefficient de corrélation est inférieur strictement à 1 et plus encore lorsque la corrélation est négative entre les rentabilités des actifs.

1.2 Portefeuille composé de "n" actions

En général, pour un portefeuille comportant n actifs :
Rendement attendu (espérance) :

$$\mathrm{E}(R_p) = \sum_i w_i\, \mathrm{E}(R_i)$$

Variance du portefeuille :
La variance du portefeuille est la somme des produits des poids w_i de chaque couple d'actifs par leur covariance σ_{ij}, cette somme inclut les poids au carré et les variances σ_{ii} (ou σ_i^2) pour chaque actif i. La covariance est souvent exprimée en termes de corrélation ρ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$
$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Volatilité du portefeuille :

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

1.3 Limites de la diversification

Il existe deux limites à la diversification : une limite théorique et une limite pratique.

a. Limite théorique

Prenons des portefeuilles comportant des investissements égaux dans N actions. La proportion investie dans chaque action est donc de 1/N. Dans chacune des cases de la matrice de variance, nous aurons $(1/N)^2$ x la variance, et dans chacune des cases de covariances, nous aurons $(1/N)^2$ x la covariance. Il y a N cases de variances et (N^2–N) cases de covariance. Ainsi avec l'augmentation de N, la variance du portefeuille se rapproche de la covariance moyenne. Si la covariance moyenne était nulle, il serait possible d'éliminer totalement le risque en détenant suffisamment de titres. Malheureusement, les actions évoluent ensemble, et non de façon indépendante.

b. Limite pratique

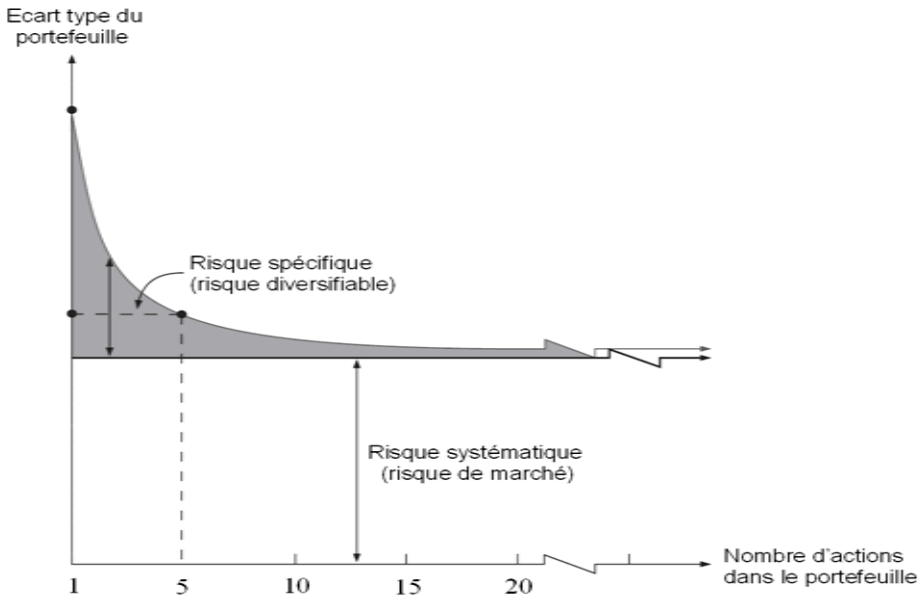
Il existe deux types de risques :

b.1 Le risque spécifique:

-Appelé également risque intrinsèque ou risque non systématique.
-Il est indépendant des phénomènes qui affectent l'ensemble des titres.
-Il est inhérent aux caractéristiques fondamentales de l'entreprise (par exemple : la mauvaise gestion de l'entreprise, les grèves...).
-Ce risque est diversifié et donc susceptible d'être éliminé par la diversification.

b.2 Le risque systématique:

-On l'appelle également risque non diversifiable ou encore, risque du marché.
- Il est lié aux structures du marché. Il résulte des périls qui peuvent affecter l'ensemble de l'économie tels que les variations du PIB, l'inflation, les taux d'intérêt.
-C'est un risque structurel qui ne peut pas être éliminé par la diversification.



Risque spécifique et risque systématique

Dans le schéma ci-dessus, on remarque que le risque est scindé en deux composantes. Si

l'investisseur ne détient qu'une action, le risque spécifique se révèle très important ; mais avec un portefeuille de plus de 20 actions, la diversification a fait le gros du travail. Dans un portefeuille bien diversifié, seul le risque systématique importe.

2. La frontière efficiente

2.1 Le concept de choix de portefeuille optimal

Les travaux de Markowitz en 1954 ont constitué la première tentative de théorisation de la gestion financière de portefeuilles et son modèle suggère une procédure de sélection de plusieurs titres boursiers, à partir de critères statistiques, afin d'obtenir des portefeuilles optimaux. Plus précisément, Markowitz a montré que l'investisseur cherche à optimiser ses choix en tenant compte non seulement de la rentabilité attendue de ses placements, mais aussi du risque de son portefeuille qu'il définit mathématiquement par la variance de sa rentabilité. Ainsi, le "portefeuille efficient" est le portefeuille le plus rentable pour un niveau de risque donné. Il est déterminé au mieux par application de méthodes de programmation quadratique ou sinon de manière heuristique en les étapes suivantes :

Etape 1 :

Nous fixons une espérance de rentabilité et nous trouvons tous les portefeuilles de variance minimale satisfaisant l'objectif de rentabilité. Nous obtenons ainsi un ensemble de portefeuilles de variance minimale.

Etape 2 :
Nous gardons de ces portefeuilles celui qui pour une variance donne le rendement le plus élevé.

En procédant ainsi pour plusieurs valeurs de l'espérance, nous nous retrouvons avec un ou plusieurs portefeuilles efficients. Ainsi, entre deux portefeuilles (ensemble d'actifs) caractérisés par leur rendement (supposé aléatoire), nous ferons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 :
A risque identique, nous retenons celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée (gain maximal)

Hypothèse 2 :
A espérance de rendement identique, nous retenons celui qui présente le risque le plus faible (aversion au risque)

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficients que d'autres.

2.2 La théorie du choix de portefeuille optimal

Soit R_p le rendement d'un portefeuille composé de n actifs caractérisés par leur rendement respectif $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Nous posons, en outre, que chaque actif i entre pour une proportion X_i dans la composition du portefeuille P tel que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

Donc l'espérance du portefeuille est donnée par :

$$E(R_p) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i R_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i E(R_i)$$

Où l'espérance de R_i est souvent pris comme étant simplement la moyenne arithmétique.

Maintenant, nous supposerons que les rendements des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres: ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles:

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) \neq 0$$

Dès lors, la variance du portefeuille est donnée par :

$$V(R_p) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 V(R_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)$$

Avant d'aller plus loin, précisons (car c'est important dans la pratique) que nous pouvons également écrire cette dernière relation sous forme matricielle (le lecteur peut facilement vérifier qu'en prenant par exemple deux titres, les deux écritures vont donner un résultat identique) si nous notons X le vecteur des parts d'actifs et X^T le même vecteur transposé

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad X^T = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

et finalement $c_{i,j}$ la matrice des covariances :

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(R_1, R_1) & \operatorname{cov}(R_1, R_2) & \cdots & \operatorname{cov}(R_1, R_n) \\ \operatorname{cov}(R_2, R_1) & \operatorname{cov}(R_2, R_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \operatorname{cov}(R_n, R_1) & \cdots & & \operatorname{cov}(R_n, R_n) \end{bmatrix}$$

Matrice qui se simplifie directement en :

$$c_{i,j} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \operatorname{cov}(R_1, R_2) & \cdots & \operatorname{cov}(R_1, R_n) \\ \operatorname{cov}(R_2, R_1) & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \operatorname{cov}(R_n, R_1) & \cdots & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons finalement la relation de la variance sous forme matricielle condensée :

$$V\left(R_p\right) = X^T \cdot \left(c_{ij} \cdot X\right)$$

Telle que nous la voyons souvent dans la littérature spécialisée ancienne... Sélectionner un portefeuille revient donc à résoudre le problème de maximisation sous les contraintes suivantes :

$$\min : Var\left(R_p\right)$$

$$E\left(R_p\right) = c^{te}$$

$$\sum X_i = 1$$

En utilisant la programmation quadratique.
Dans la pratique, nous cherchons non pas un, mais tous les portefeuilles qui pour une espérance donnée minimise la variance.

Définition:

La frontière qui caractérise le polygone ou la courbe des contraintes s'appelle dans cette situation la "frontière efficiente (de Markowitz)" et dans le polygone/courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter dits "portefeuilles dominés". Une autre manière de formuler ceci consiste à dire que les combinaisons (rendement, risque) de cette frontière forment un ensemble d'optima de Pareto, c'est-à-dire que si l'un des éléments augmente, l'autre doit augmenter aussi.

Maintenant, formalisons l'optimisation comme cela était fait à l'époque où les gens devaient encore développer les algorithmes eux mêmes...

Soit Z la fonction économique définie par:

$$Z = \Phi E(R_p) - V(R_p)$$

qui doit être maximisée sous la contrainte que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$ et où Φ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs (histoire aussi d'homogénéiser la relation...).

Le problème de maximisation sous contrainte consiste à déterminer le maximum de la fonction économique Z définie par:

$$Z = \Phi \sum_{i=1}^{n} X_i E(R_i) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j \operatorname{cov}(R_i, R_j) + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Cette fonction de n + 1 variables ($X_1, X_2, \ldots, X_n, \lambda$) est maximisée si sa dérivée (partielle) par rapport à chacune de ces variables est nulle, ce qui revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial X_1} = \Phi E(R_1) - 2X_1 \operatorname{cov}(R_1,R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_1,R_2) - \ldots - 2X_n \operatorname{cov}(R_1,R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X_2} = \Phi E(R_2) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_2,R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_2,R_2) - \ldots - 2X_n \operatorname{cov}(R_2,R_n) - \lambda = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial Z}{\partial X_n} = \Phi E(R_n) - 2X_1 \operatorname{cov}(R_n,R_1) - 2X_2 \operatorname{cov}(R_n,R_2) - \ldots - 2X_n \operatorname{cov}(R_n,R_n) - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - \ldots - X_n = 0 \end{cases}$$

Posons:

$$\operatorname{cov}(R_i,R_j) = \sigma_{ij}$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\begin{cases} 2X_1\sigma_{11} + 2X_2\sigma_{12} + \ldots + 2X_n\sigma_{1n} + \lambda = \Phi E(R_1) \\ 2X_2\sigma_{21} + 2X_2\sigma_{22} + \ldots + 2X_n\sigma_{2n} + \lambda = \Phi E(R_2) \\ \ldots \\ 2X_1\sigma_{n1} + 2X_2\sigma_{n2} + \ldots + 2X_n\sigma_{nn} + \lambda = \Phi E(R_n) \\ X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 1 \end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi E(R_1) \\ \Phi E(R_2) \\ \\ \Phi E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit désormais :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ X_n \\ \lambda \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \ldots & 2\sigma_{1n} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & \ldots & 2\sigma_{2n} & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & \ldots & 2\sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \Phi E(R_1) \\ \Phi E(R_2) \\ \\ \Phi E(R_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système d'équations à résoudre peut se résumer sous la forme matricielle:

$$A \cdot X = B$$

Par conséquent:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

La détermination du poids de chacun des n actifs susceptibles d'entrer dans la composition d'un portefeuille passe donc par l'inversion d'une matrice carrée de n + 1 lignes et n + 1 colonnes comportant $\left(n^2 - n\right)/2$ covariances (la diagonale comportant des variances seulement et la matrice étant symétrique!). Ce qui est relativement long à calculer pour de gros portefeuilles.

Cependant, même une fois la pondération des actifs terminée, le problème lui ne l'est pas complètement. Effectivement, nous pouvons donc connaître la frontière efficiente mais le client va lui imposer une contrainte bien logique au niveau du risque nul de son portefeuille et du rapport rendement/risque maximum.
Il est donc possible de constituer une infinité de portefeuilles en faisant varier les proportions investies dans chacun des titres. La prochaine étape consiste à sélectionner, parmi l'ensemble des portefeuilles disponibles, un portefeuille donné. Pour ce faire, on doit considérer les préférences individuelles de l'investisseur.
Un investisseur rationnel ne devrait donc considérer que les portefeuilles se trouvant sur la frontière efficiente pour ses choix d'investissement. Son portefeuille optimal se situera donc au point de tangence entre la frontière efficiente et sa courbe d'indifférence la plus haute qu'il serait capable d'atteindre. En procédant ainsi, chaque investisseur maximisera son utilité espérée. En présence d'une économie ne contenant que des actifs risqués, la composition du portefeuille d'actifs risqués varie d'un individu à un autre.

En pratique, les investisseurs ont également la possibilité d'investir dans des actifs financiers sans risques. Nous allons donc chercher à déterminer la nouvelle frontière efficiente en tenant compte de cette nouvelle opportunité d'investissement.
Considérons alors un portefeuille qui est une combinaison de l'actif sans risque et d'un portefeuille de marché (à risque). Nous avons alors :

$$R_p = X_m R_m + \left(1 - X_m\right) R_f$$

où X_M est la fraction du portefeuille investie dans le portefeuille du marché (m) et R_f est le "taux de rendement certain".
Rappel : L'espérance d'une constante est égale à cette constante. Nous avons donc :

$$E(R_p) = X_m E(R_m) + \left(1 - X_m\right) E(R_f) = X_m E(R_m) + \left(1 - X_m\right) R_f$$

et donc :

$$\begin{aligned} Var\left(R_p\right) &= E\left(\left(R_p - E\left(R_p\right)\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(X_m R_m + \left(1 - X_m\right) R_f - X_m E\left(R_m\right) - \left(1 - X_m\right) R_f\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$= E\left(\left(X_m\left(R_m - E\left(R_m\right)\right)\right)^2\right)$$

$$Var\left(R_p\right) = X_m^2 Var\left(R_m\right)$$

Soit : $\sigma_p^2 = X_m^2 \sigma_m^2$

La dérivée du rendement espéré par rapport à X_m nous donne :

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial X_m} = E(R_M) - R_f$$

La dérivée de l'écart-type par rapport à X_m nous donne : $\frac{\partial \sigma(R_p)}{\partial X_m} = \sigma(R_m)$

Mettant ces deux résultats ensemble, nous avons : $\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma(R_p)} = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)}$

Cette équation nous donne la pente de la "capital market line" (C.M.L.). Elle est constante (la pente!), et donc la C.M.L. est une droite. L'ordonnée à l'origine est évidemment R_f .
Puisque :

$$E(R_p) = X_m E(R_m) + \left(1 - X_m\right) R_f = X_m\left(E(R_m) - R_f\right) + R_f$$

L'équation de la C.M.L. se réduit alors à : $E(R_p) = \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R_m)}\left(E(R_m) - R_f\right) + R_f$

Et puisque dans la finance l'intérêt est de représenter graphiquement.

$$E(R_p) = f\left(\sigma(R_p)\right)$$

Alors il est de tradition de noter la fonction sous la forme suivante :

$$E(R_p) = \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma(R_m)}\sigma(R_p) + R_f$$

Par construction, cette droite associe donc à chaque niveau de risque, la rentabilité espérée la plus élevé. Ainsi, étant donnée le rendement d'un actif sans risque il devient facile à partir de cette équation de déterminer le point de tangence avec la frontière d'efficience de Markowitz ou de Sharpe pour obtenir le portefeuille le plus efficient sur la base du rendement sans risque.

2.3 Les limites du Modèle de Markowitz

Depuis son apparition, le modèle de Markowitz a pris une place très importante dans l'évolution de la finance moderne et il a réalisé beaucoup de succès avec son apport en matière de gestion de portefeuille.

Mais avec les ajustements récents, ce modèle s'est trouvé plusieurs limites soulevées par plusieurs praticiens de la théorie financière. Parmi ces limites, on note :

- Le modèle suppose la rationalité des investisseurs. Or, la réalité a prouvé q'une croyance tout à fait irrationnelle peut être vu légitime par le seul fait qu'elle soit collectivement admise par un opérateur crédible ;
- Le modèle ne s'est pas intéressé à la décomposition du risque global du marché mais s'est limité à l'analyse et à l'évaluation du risque individuel ou spécifique ; d'où l'apparition d'un nouveau modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) ;
- Le modèle suppose également la normalité de la distribution des rentabilités, chose qui n'est pas toujours vérifiable dans la réalité. Cette limite a été résolue par l'apparition du modèle de «Dominance stochastique» qui s'applique à tout type de distribution ;
- La variance a été considérée comme une mesure simplificatrice de la fonction de la rentabilité, tandis que la «Dominance stochastique» admet une comparaison de la distribution entière ;
- La variance étant une mesure non parfaite du risque, une nouvelle technique de mesure a été développée en 1993, appelé Value-At-Risk (VaR). Cette technique permet de déterminer la perte maximale probabilisée sur un portefeuille quelconque.

II/ Cas pratique

Nous allons considérer les prix mensuels de clôture ajusté de dividendes et divisions des 40 titres du Cac 40 de Janvier à Octobre 2012 (cf. annexe tableau (1)).

Puis, dans MS Excel, nous allons calculer les rendements $R_{i,j}$ des actifs (la composante j pouvant être vue comme une période temporelle) à partir des prix recueillis (cf. annexe tableaux (2) et (3)).
Le but est donc de déterminer la frontière d'efficience du portefeuille selon le modèle de Markowitz ainsi que la C.M.L. et la pondération des actifs qui minimise la variance pour une espérance maximum pour un portefeuille contenant un actif sans risque d'un rendement Rf (fixé par l'utilisateur).Nous choisirons pour ce cas un rendement $R_f = 0{,}002$.

Ensuite nous allons créer dans MS Excel le tableau contenant les proportions X_i des titres (que nous supposerons équidistribuées, soit 1/40), nous afficherons la moyenne du rendement μ_i calculée bien évidemment selon l'estimateur :

$$E(R_i) = \mu_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}}{n} = MOYENNE(X25 : X33)$$

(cf. annexe tableau (4))

Et la variance σ_i^2 calculée pour chaque titre par l'estimateur :

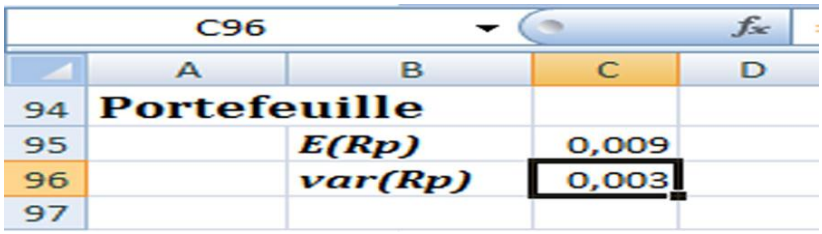
$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}(R_{i,j} - \mu_i)^2}{n-1} = VAR(X25:X33)$$

Avec $X = C \rightarrow AP$
(cf. annexe tableau (4)).

Nous devons maintenant calculer le rendement moyen du portefeuille selon :

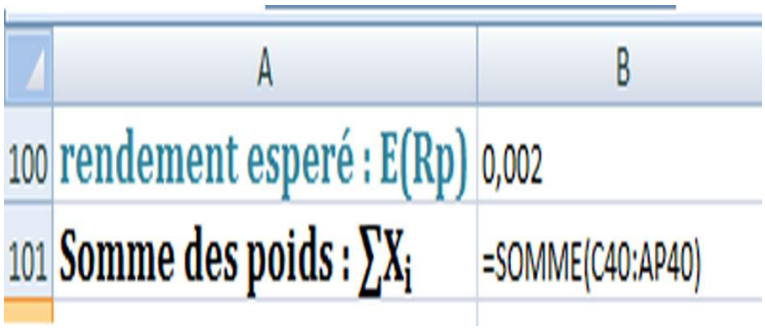
$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i$$

Et pour l'espérance et la variance du portefeuille nous aurons donc le tableau suivant



(voir annexe tableau(6)).

Le problème maintenant est de déterminer pour un rendement du portefeuille fixé (C95), les proportions des différents titres qui minimisent le risque.
Après avoir ajouté les deux cellules B100 (rendement espéré/attendu du portefeuille) et B101 (nombre total des parts du portefeuille) :



Nous devons donc maintenant résoudre le problème d'optimisation non linéaire :

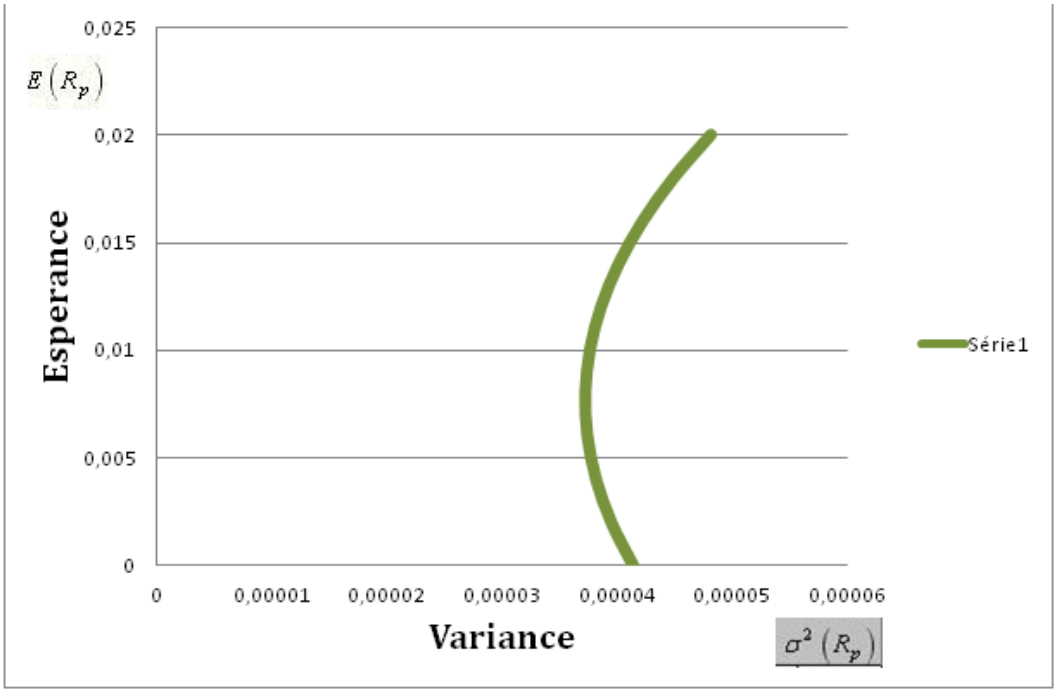
$$\min : \sigma^2(R_p)$$
$$E(R_p) = 0{,}002$$
$$\sum X_i = 1$$

Et ceci peut se faire (simplement) à l'aide du solveur MS Excel. Ainsi, en définissant la cellule cible C96=SOMMEPROD(PRODUITMAT(C40:AP40;C50:AP89);C40:AP40) égale à min, en choisissant les cellules variables de C40 à AP40 avec les contraintes B101=1 et C95=C100, nous demandons au solveur de résoudre le problème d'optimisation ci-dessus

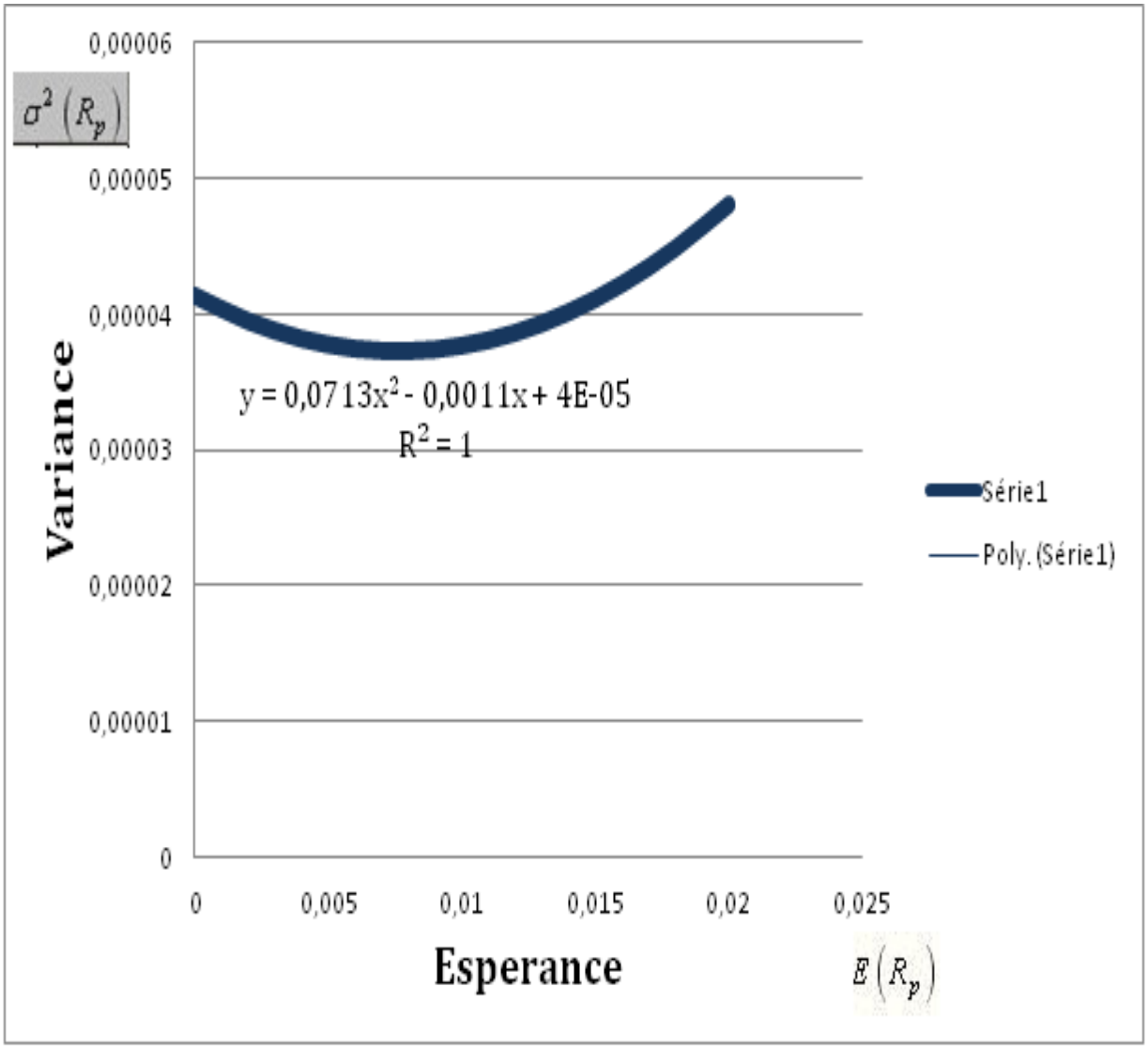
pour un rendement espéré donnée (cf. annexe tableau (10)).
Nous cherchons donc le portefeuille qui pour une espérance donnée minimise la variance.
Ce que nous allons faire à l'aide du solveur est de chercher et reporter les solutions pour des rendements de 0 à 0.2 par pas de 0.002. A chaque résultat, nous noterons le numéro de l'itération, la variance du portefeuille $\sigma^2(R_p)$ et l'espérance de rendement $E(R_p)$ qui était exigée.
Ainsi on a :

	E	F	G
104	***Itération***	***Variance***	***Rendement***
105	1	4,1358E-05	0
106	2	3,94668E-05	0,002
107	3	3,81463E-05	0,004
108	4	3,73967E-05	0,006
109	5	3,72178E-05	0,008
110	6	3,76098E-05	0,01
111	7	3,85725E-05	0,012
112	8	4,0106E-05	0,014
113	9	4,22103E-05	0,016
114	10	4,48853E-05	0,018
115	11	4,81312E-05	0,02

Ce qui donne la frontière efficiente de Markowitz suivante sous forme graphique dans MS Excel :



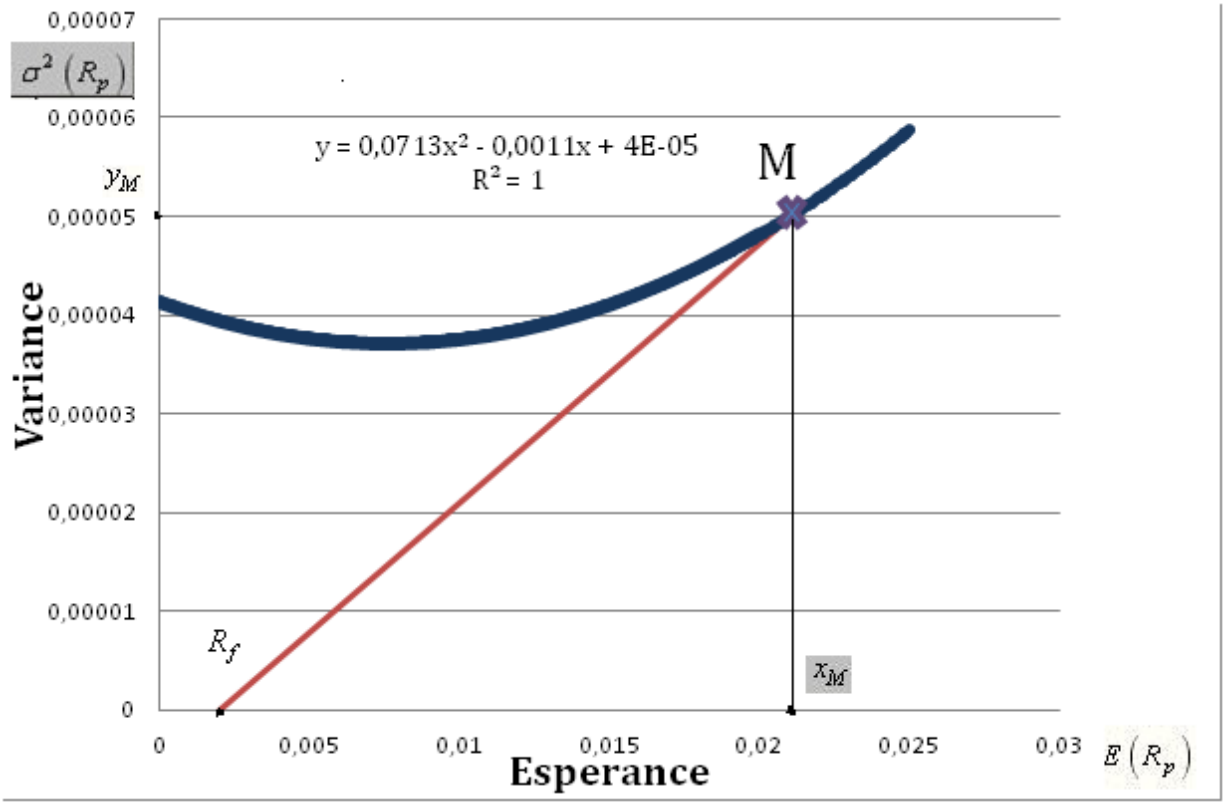
Maintenant il est aisé avec MS Excel de déterminer l'équation de cette parabole en utilisant l'outil d'interpolation (nous sommes obligés dans MS Excel de tourner la parabole pour cela…)



Maintenant, nous allons déterminer la C.M.L qui est la droite formée par l'ensemble des portefeuilles composés de l'actif sans risque, d'une part, et du portefeuille de marché, d'autre part. Par construction, elle associe à chaque niveau de risque, la rentabilité espérée la plus élevée.

Nous allons pour déterminer cette droite avec MS Excel nous fixer dans un premier temps un taux de rendement sans risque que nous noterons R_f et que nous prendrons arbitrairement comme valant 0.002. Nous avons donc la courbe de Markowitz d'équation :

$$y = 0{,}0713x^2 - 0{,}0011x + 0{,}00004 = ax^2 + bx + c$$



Et la droite : $y = a'x + b'$

Avec la condition : $a' = -\frac{b'}{R_f}$ car $(0, R_f)$ appartient à cette droite.

Nous avons alors deux équations connues à deux inconnues pour résoudre ce problème (l'intersection de la droite et la parabole pour la première et l'égalité de la pente de la parabole et de la droite au point d'intersection) :

$$ax_M^2 + bx_M + c = a'x_M + b'$$
$$2ax_M + b = a'$$

La deuxième équation nous donne :

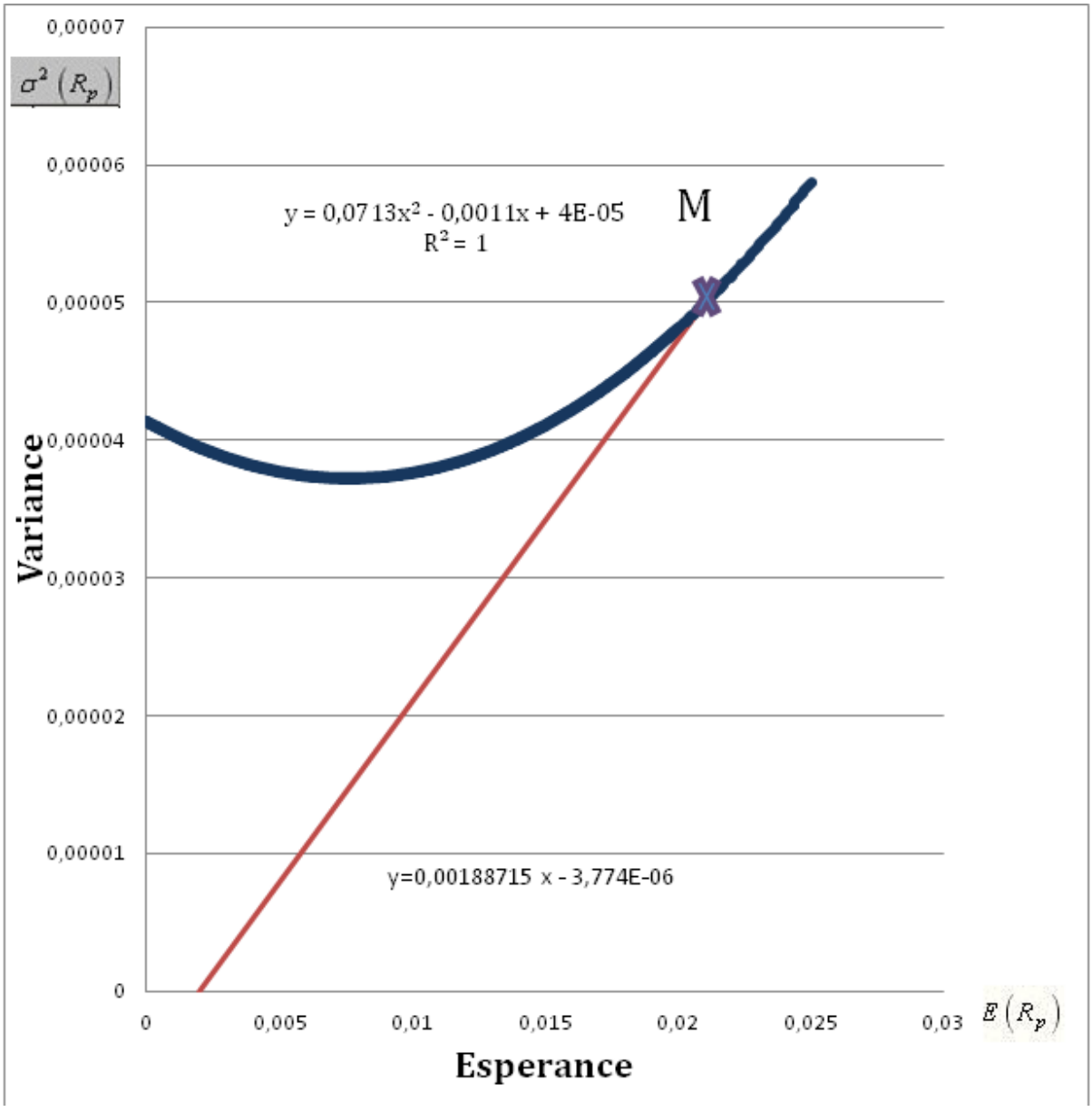
$$x_M = \frac{a' - b}{2a} = \frac{\frac{-b'}{R_f} - b}{2a}$$

Injecté dans la première équation : $a\left(\frac{\frac{-b'}{R_f} - b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{\frac{-b'}{R_f} - b}{2a}\right) + c = -\frac{b'}{R_f}\left(\frac{\frac{-b'}{R_f} - b}{2a}\right) + b'$

Si nous résolvons ce polynôme du deuxième degré nous avons deux solutions réelles :

$$\Delta = \frac{b}{aR_f} + \frac{2c}{aR_f^2} + 1 - \frac{b^2}{4a^2R_f^2}$$

Nous avons donc: $b' = b'_2 = -3{,}77E-06$
(cf. annexe tableau (11)).
Ce qui donne sous forme graphique :



Il vient aussi immédiatement :

$$X_M = X_{M2} = 0{,}020947779$$

(cf. annexe tableau (12)).
Ainsi, en réutilisant le solveur comme plus haut mais avec cette nouvelle valeur pour l'espérance, nous obtenons pour un portefeuille du marché composé d'un actif sans risque de

rendement 0.002, un rendement global efficient de 0,020948… avec la composition suivante du portefeuille donnée par le solveur en annexe (cf. tableau 13).

Conclusion

L'intérêt du modèle de Markowitz est limité pour le professionnel, et plus encore pour le particulier qui ne dispose pas d'un outil informatique sophistiqué nécessaire pour des applications pratiques. Néanmoins il a le grand intérêt de conceptualiser le couple risque-rentabilité, les mérites de la diversification airs que le caractère unique de la préférence personnelle par rapport au risque. A l'inverse, le concept d'efficience des marchés a été démenti par les faits. Si les marchés sont vraiment efficients, rien ne peut expliquer le krach du 19 Octobre 1987. Aucune nouvelle connue ce jour là ne peut justifier la disparition en quelques heures de 500 milliards de dollars, c'est pourtant la perte papier cumulée de l'ensemble des valeurs cotées sur le New York Stock Exchange.

La conclusion du modèle de Markowitz selon laquelle le portefeuille risque optimal est le portefeuille représentatif du marché dans son ensemble, n'est plus vérifiée dans un marché inefficient.

Alors, une information meilleure ou une analyse supérieure permettront à l'investisseur de trouver des portefeuilles ayant une rentabilité supérieure (après pondération du risque) au portefeuille marché. Ils se trouveront sur notre graphe au dessus de la droite des marchés de capitaux. C'est de ce constat dont se nourrissent les milliers de professionnels des marchés-analystes financiers, stratégistes en investissement, gestionnaires de fons pour justifier leurs émoluments. Et en fait, comble du paradoxe, ce sont ces mêmes professionnels qui par leurs travaux génèrent et diffusent l'information permettant aux marchés modernes d'approcher l'état d'efficience.

BIBLIOGRAPHIE

- Gestion de Portefeuille, support de cours Abdou Kâ Diongue, UFR SAT Université Gaston Berger de Saint-Louis
- Gestion de Portefeuille : le Modèle de Markowitz, Aboudarka Moulay Youssef, El Fahmi Imane & El Haddad Mohammed Yassine, Université Mohammed V
- Charreuax G, Gestion Financière, Edition 1998
- Simon Y., Encyclopédie de gestion, Edition Gestion, 2001
- Viviani G., Gestion de portefeuille, Edition Dunod, 1990
- La mesure du risque dans le domaine de l'économique, Emmanuel Nyemera
- Markowitz
- Sharpe

ANNEXE

Pour résoudre notre problème d'optimisation avec Excel, nous avons utilisé des formules mathématiques et autres outils simples et accessibles.

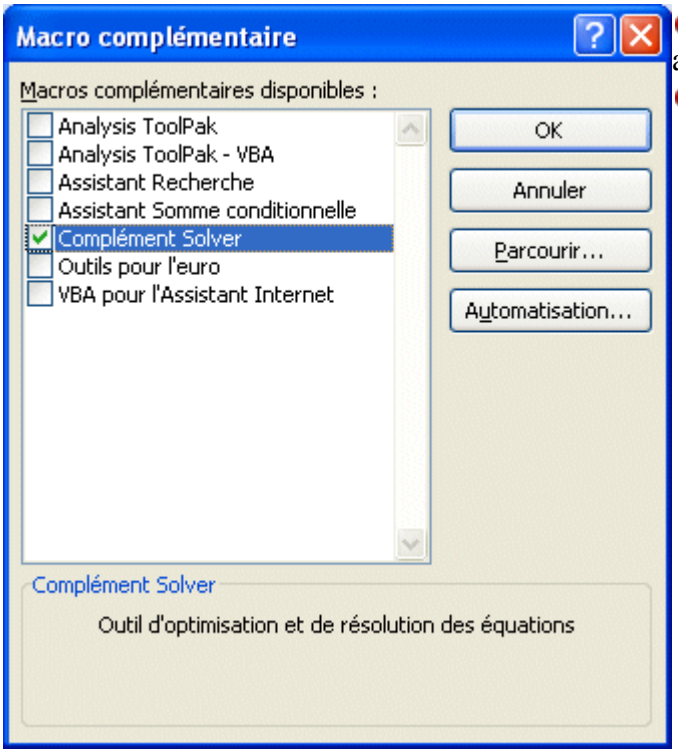
Nous insisterons sur le solveur, car le solveur est un outil complémentaire que vous pouvez utiliser pour optimiser le modèle que vous avez déjà préparé. Vous pouvez essayer de maximiser vos profits, minimiser vos pertes ou atteindre une objectif avec le moindre de ressources possibles. Il ne faut surtout pas oublier d'ajouter les contraintes qui limitent votre modèle. Sinon, votre résultat ira vers l'infini.

Activer le Solveur

Puisqu'il s'agit d'un modèle complémentaire, il n'est pas disponible dès l'ouverture d'Excel. Suivez les instructions ci-dessous pour activer le Solveur.

- Appuyez sur le bouton Office .
- Appuyez sur le bouton Options Excel.
- De la colonne de gauche, sélectionnez la catégorie Compléments.

- De la zone Gérer, sélectionnez l'option Compléments Excel et appuyez sur le bouton Atteindre.



- De la liste des macros complémentaires, activez l'option Complément Solver.
- Appuyez sur le bouton OK.

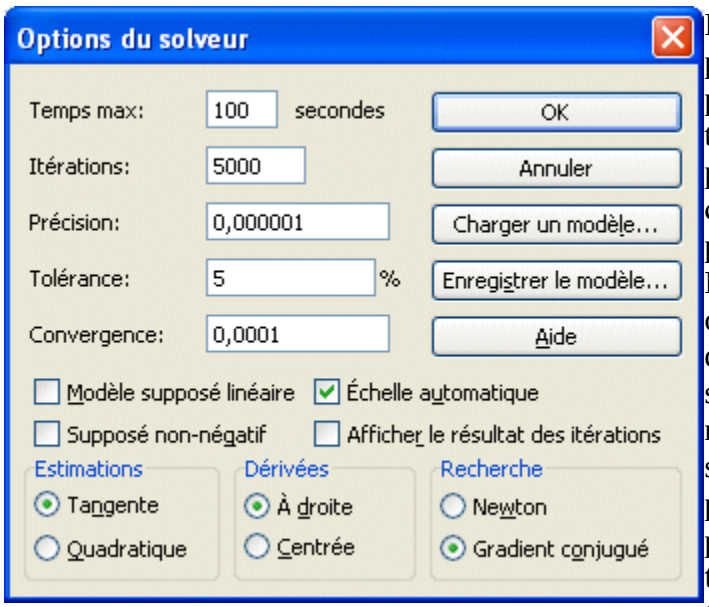
C'est à la fin de l'onglet Données que vous allez maintenant retrouver l'outil Solveur.

	Pour Excel 2003 ● Du menu Outils, sélectionnez l'option Macros complémentaires.

	●Sélectionnez l'option Complément Solveur. ●Appuyez sur le bouton OK.

Options du Solveur

●Appuyez sur le bouton Options.

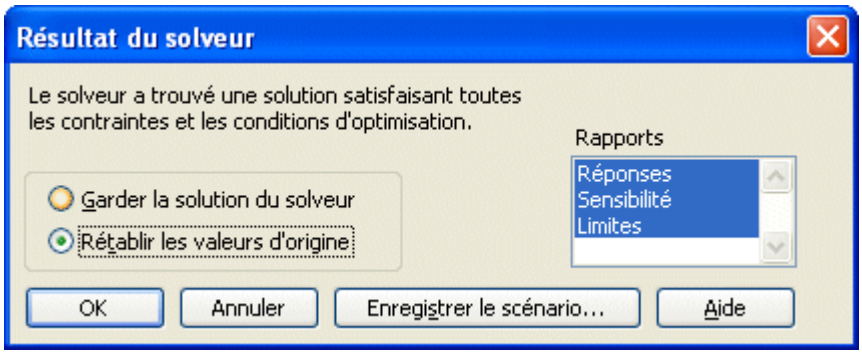


Le solveur vous offre plusieurs options pour vous aider à le gérer. Vous pouvez placer un temps maximum pour trouver la solution optimale. Vous pouvez aussi déterminer le nombre d'essais, ou d'itérations, que le solveur peut prendre pour trouver la solution. Le degré de précision, de tolérance et convergence vous aide à déterminer à quel point vous serez proche de la solution optimale selon le type de modèle que vous avez. Le modèle supposé linéaire optimise le solveur pour des modèles simples. Vous pouvez aussi choisir parmi plusieurs types d'estimations, de dérivées et de types de recherches pour retrouver la solution optimale qui varie d'efficacité selon les équations à résoudre.

●Activez l'option Échelle automatique.
●Pour sortir des options du Solveur, appuyez sur le bouton OK.

Résoudre le problème

●Appuyez sur le bouton Résoudre.



●Sélectionnez l'option Rétablir les valeurs d'origines ainsi que tous les rapports.
●Appuyez sur le bouton OK.

Excel va générer trois nouvelles feuilles de calcul avec les résultats d'analyse du degré de

réponse et de sensibilité des variables ainsi que leurs limites. Cela vous aidera à déterminer quelles sont les variables les plus importantes selon leur impact sur votre modèle.

Voici les données recueillies à partir du Cac 40

A11 fx 01/10/2012

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
9		*Titres*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
10	Dates	Temps	AC.PA	PA	AI.PA	A	ALU.P/	BN.PA	BNP.P.	CA.PA	CAP.P/	CS.PA	DG.PA	EAD.P/	EDF.P/	EI.PA	EN.PA	FP.PA	FTE.P/	GLE.P/	GSZ.PA
11	01/10/12	10	25,28	5,97	93,45	27,12	0,77	47,81	38,45	16,23	31,66	11,74	33,57	26,34	16,52	69,53	19,32	38,13	9,28	23,98	17,33
12	03/09/12	9	25,95	5,37	96,45	27,28	0,86	47,91	36,98	16,14	32,92	11,59	33,15	24,67	16,31	72,87	19	38,6	9,39	22,1	17,4
13	01/08/12	8	25,21	4,64	93,55	28,31	0,9	49,55	34,56	16,67	29,23	11,51	34,59	30,32	16,19	69,39	19,77	39,15	10,99	21,05	19,58
14	02/07/12	7	27,07	3,49	90,98	27,04	0,9	49,48	30,17	14,59	29,76	9,95	34,55	29,26	16,87	70,84	20,52	37,08	10,89	18,01	18,18
15	01/06/12	6	24,68	3,47	90,05	24,93	1,3	49,01	30,33	13,49	29	10,48	36,78	27,94	17,55	73,3	21,2	35	10,38	18,41	18,75
16	02/05/12	5	23,49	2,89	87,47	22,72	1,26	51,89	25,73	12,94	26,23	9,08	32,31	26,6	14,98	69,08	19,51	33,73	9,37	16,06	15,98
17	02/04/12	4	25,56	3,88	85,83	26,09	1,16	51,8	28,96	14,08	28,39	10	33,7	29,31	15,39	65,71	20,52	34,99	9,53	17,86	17,39
18	01/03/12	3	26,22	4,66	88,29	28,29	1,71	50,97	33,95	16,67	32,31	11,62	37,65	30,18	16,47	66	21,26	37,1	10,24	21,97	18,66
19	01/02/12	2	25,86	4,81	86,15	31,27	1,88	49,49	34,96	17,46	31,84	11,31	37,63	26,8	18,02	59,02	22,14	40,19	10,56	24,25	18,76
20	03/01/12	1	22,75	4,71	84,99	28,18	1,36	45,99	30,89	16,19	26,87	10,84	34,14	25,24	16,96	55,3	22,03	38,67	10,57	20,36	19,99
21																					

AA22 fx

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
9	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*
10	KN.PA	LG.PA	MC.PA	ML.PA	MT.PA	OR.PA	PP.PA	PUB.PA	RI.PA	RNO	SAN	SEV.PA	SGO	STM.PA	SU.PA	TEC.PA	UG.PA	UL.PA	VIE.PA	VIV.PA	VK.
11	2,53	43,12	121,8	65,1	18,66	96,49	130,7	42,56	84,5	37,25	24,85	8,44	27,61	4,58	49,72	91,7	6,1	172,9	8,51	15,74	34,33
12	2,45	41,91	116	60,96	18,66	96,26	119,4	43,55	86,43	36,52	24,75	8,82	27,33	4,02	46,06	86,51	6,15	163,3	8,4	15,18	32,95
13	2,17	37,92	128,6	57,05	11,74	97,74	124,2	41,26	84,81	37,17	23,66	8,91	27,27	4,52	50,21	83,74	6,01	162,2	8,42	15,59	36,87
14	2,04	37,43	121,5	55,42	12,75	97,62	122	40,1	86,63	35,59	23,17	8,94	24,56	4,15	46,03	85,68	6,33	156,4	9,18	15,46	33,76
15	2,12	34,66	118,8	51,48	11,82	92,24	112,3	36,05	82,7	31,44	22,21	8,47	29,1	4,06	43,73	81,95	7,75	145,1	9,98	14,63	32,17
16	1,79	29,32	118,3	47,25	10,9	90,92	115	36,68	77,54	33,88	18,88	8,78	27,33	3,79	43,07	73,71	7,98	133,6	9,24	13,06	28,89
17	2,18	29,04	124	54,11	12,55	90,89	122,9	38,2	76,96	33,06	21,85	9,95	30,22	3,94	44,66	83,8	9,07	133,2	10,31	12,5	43,45
18	2,73	35,28	125,8	53,54	13,76	90,51	125,4	40,53	76,95	38,07	23,03	10,74	31,98	5,63	47,15	86,64	12,07	141,5	11,58	12,32	45,43
19	2,57	34,41	123,3	49,64	15,2	83,78	124,1	40,27	76,22	38,28	23,05	10,27	34,03	5,15	49,09	80,36	15,05	136,8	8,56	14,43	50,55
20	2,23	30,7	120,7	50,15	14,6	79,57	117	37,71	72,03	31,37	21,66	9,14	32,49	4,58	45,69	70,35	14,1	138,5	8,09	14,32	49,38

(1)

Pour le calcul des rendements, nous avons utilisé les formules suivantes (juste un aperçu avec les cinq premiers actifs) sous Excel :

A33

	A	B	C	D	E	F	G
23	*Rendements*	*Titres*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
24		Observation	AC.PA	ACA	AI.PA	ALO	ALU.PA
25		1	=(C19-C20)/C20	=(D19-D20)/D20	=(E19-E20)/E20	=(F19-F20)/F20	=(G19-G20)/G20
26		2	=(C18-C19)/C19	=(D18-D19)/D19	=(E18-E19)/E19	=(F18-F19)/F19	=(G18-G19)/G19
27		3	=(C17-C18)/C18	=(D17-D18)/D18	=(E17-E18)/E18	=(F17-F18)/F18	=(G17-G18)/G18
28		4	=(C16-C17)/C17	=(D16-D17)/D17	=(E16-E17)/E17	=(F16-F17)/F17	=(G16-G17)/G17
29	$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$	5	=(C15-C16)/C16	=(D15-D16)/D16	=(E15-E16)/E16	=(F15-F16)/F16	=(G15-G16)/G16
30		6	=(C14-C15)/C15	=(D14-D15)/D15	=(E14-E15)/E15	=(F14-F15)/F15	=(G14-G15)/G15
31		7	=(C13-C14)/C14	=(D13-D14)/D14	=(E13-E14)/E14	=(F13-F14)/F14	=(G13-G14)/G14
32		8	=(C12-C13)/C13	=(D12-D13)/D13	=(E12-E13)/E13	=(F12-F13)/F13	=(G12-G13)/G13
33		9	=(C11-C12)/C12	=(D11-D12)/D12	=(E11-E12)/E12	=(F11-F12)/F12	=(G11-G12)/G12

(2)

Les rendements des actifs $R_{t,j}$ calculés dans MS Excel (la composante j pouvant être vue comme une période temporelle) à partir des prix recueillis:

A40

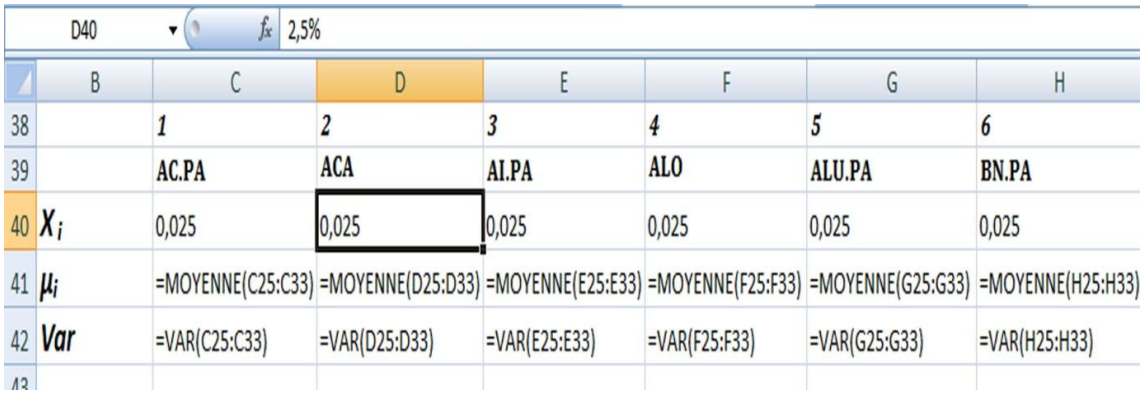
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
23	*Rendemer*	*Titres*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
24		Observ	AC.PA	ACA	AI.PA	ALO	ALU.P/	BN.PA	BNP.P/	CA.PA	CAP.P/	CS.PA	DG.PA	EAD.P/	EDF.P/	EI.PA	EN.PA	FP.PA	FTE.P/	GLE.P/	GSZ.P/
25		1	0,137	0,021	0,014	0,11	0,382	0,076	0,132	0,078	0,185	0,043	0,102	0,062	0,062	0,067	0,005	0,039	-9E-04	0,191	-0,062
26		2	0,014	-0,031	0,025	-0,095	-0,09	0,03	-0,029	-0,045	0,015	0,027	5E-04	0,126	-0,086	0,118	-0,04	-0,077	-0,03	-0,094	-0,005
27		3	-0,025	-0,167	-0,028	-0,078	-0,322	0,016	-0,147	-0,155	-0,121	-0,139	-0,105	-0,029	-0,066	-0,004	-0,035	-0,057	-0,069	-0,187	-0,068
28		4	-0,081	-0,255	0,019	-0,129	0,086	0,002	-0,112	-0,081	-0,076	-0,092	-0,041	-0,092	-0,027	0,051	-0,049	-0,036	-0,017	-0,101	-0,081
29	$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$	5	0,051	0,201	0,029	0,097	0,032	-0,056	0,179	0,043	0,106	0,154	0,138	0,05	0,172	0,061	0,087	0,038	0,108	0,146	0,173
30		6	0,097	0,006	0,01	0,085	-0,308	0,01	-0,005	0,082	0,026	-0,051	-0,061	0,047	-0,039	-0,034	-0,032	0,059	0,049	-0,022	-0,03
31		7	-0,069	0,33	0,028	0,047	0	0,001	0,146	0,143	-0,018	0,157	0,001	0,036	-0,04	-0,02	-0,037	0,056	0,009	0,169	0,077
32		8	0,029	0,157	0,031	-0,036	-0,044	-0,033	0,07	-0,032	0,126	0,007	-0,042	-0,186	0,007	0,05	-0,039	-0,014	-0,146	0,05	-0,111
33		9	-0,026	0,112	-0,031	-0,006	-0,105	-0,002	0,04	0,006	-0,038	0,013	0,013	0,068	0,013	-0,046	0,017	-0,012	-0,012	0,085	-0,004
34																					

A40

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
23	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*
24	KN.PA	LG.PA	MC.PA	ML.PA	MT.PA	OR.PA	PP.PA	PUB.PA	RI.PA	RNO	SAN	SEV.PA	SGO	STM.PA	SU.PA	TEC.PA	UG.PA	UL.PA	VIE.PA	VIV.PA	VK.
25	0,152	0,121	0,022	-0,01	0,041	0,053	0,061	0,0679	0,058	0,22	0,064	0,1236	0,047	0,1245	0,074	0,14229	0,067	-0,012	0,058	0,008	0,024
26	0,062	0,025	0,02	0,079	-0,095	0,08	0,011	0,0065	0,01	-0,005	-9E-04	0,0458	-0,06	0,0932	-0,04	0,07815	-0,198	0,034	0,353	-0,146	-0,101
27	-0,201	-0,177	-0,014	0,011	-0,088	0,004	-0,021	-0,0575	1E-04	-0,132	-0,051	-0,074	-0,055	-0,3002	-0,053	-0,0328	-0,249	-0,058	-0,11	0,015	-0,044
28	-0,179	0,01	-0,046	-0,127	-0,131	3E-04	-0,064	-0,0398	0,008	0,025	-0,136	-0,118	-0,096	-0,0381	-0,036	-0,1204	-0,12	0,003	-0,104	0,045	-0,335
29	0,184	0,182	0,004	0,09	0,084	0,015	-0,024	-0,0172	0,067	-0,072	0,176	-0,035	0,065	0,0712	0,015	0,11179	-0,029	0,086	0,08	0,12	0,114
30	-0,038	0,08	0,022	0,077	0,079	0,058	0,087	0,1123	0,048	0,132	0,043	0,0555	-0,156	0,0222	0,053	0,04552	-0,183	0,078	-0,08	0,057	0,049
31	0,064	0,013	0,059	0,029	-0,079	0,001	0,018	0,0289	-0,021	0,044	0,021	-0,003	0,11	0,0892	0,091	-0,0226	-0,051	0,037	-0,083	0,008	0,092
32	0,129	0,105	-0,099	0,069	0,589	-0,015	-0,039	0,0555	0,019	-0,017	0,046	-0,01	0,002	-0,1106	-0,083	0,03308	0,023	0,007	-0,002	-0,026	-0,106
33	0,033	0,029	0,05	0,068	0	0,002	0,095	-0,0227	-0,022	0,02	0,004	-0,043	0,01	0,1393	0,079	0,05999	-0,008	0,059	0,013	0,037	0,042
34																					

(3)

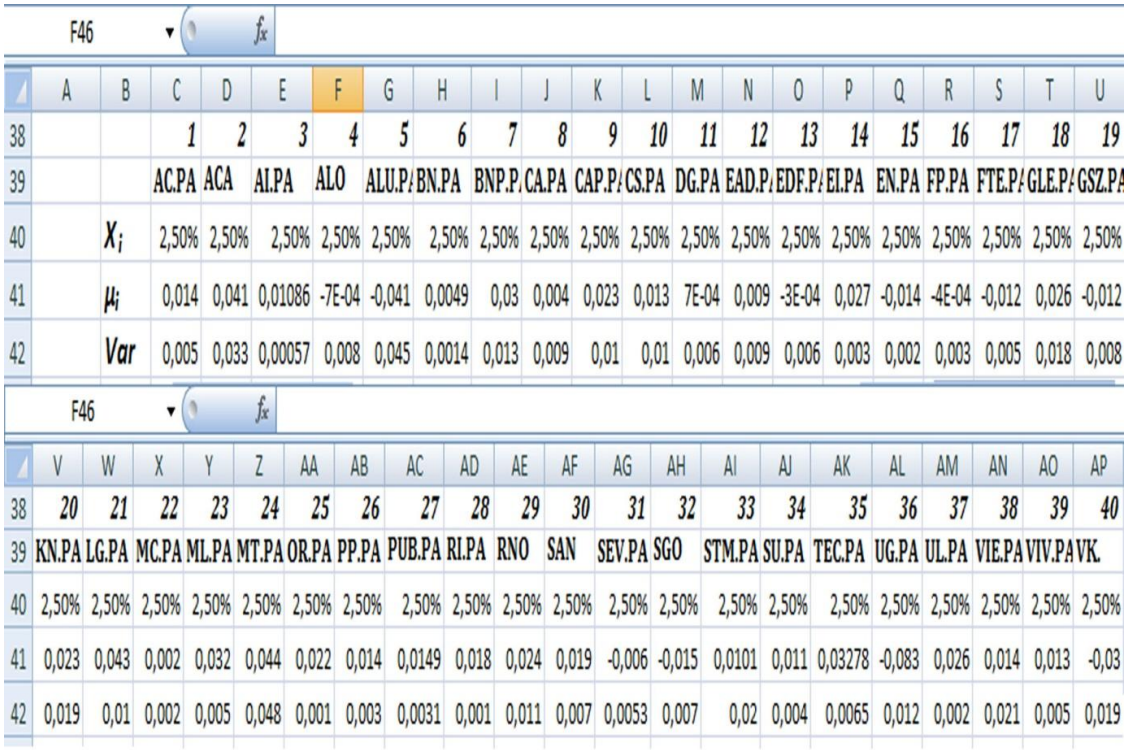
Les proportions des titres sont supposées équidistribuées, soit 1/40. Les rendements et les variances sont calculés à partir du tableau des rendements sous les formes détaillées suivantes :



	B	C	D	E	F	G	H
38		*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
39		**AC.PA**	**ACA**	**AI.PA**	**ALO**	**ALU.PA**	**BN.PA**
40	X_i	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025
41	μ_i	=MOYENNE(C25:C33)	=MOYENNE(D25:D33)	=MOYENNE(E25:E33)	=MOYENNE(F25:F33)	=MOYENNE(G25:G33)	=MOYENNE(H25:H33)
42	*Var*	=VAR(C25:C33)	=VAR(D25:D33)	=VAR(E25:E33)	=VAR(F25:F33)	=VAR(G25:G33)	=VAR(H25:H33)

(4)

Ce qui nous donne le tableau suivant dans MS Excel :

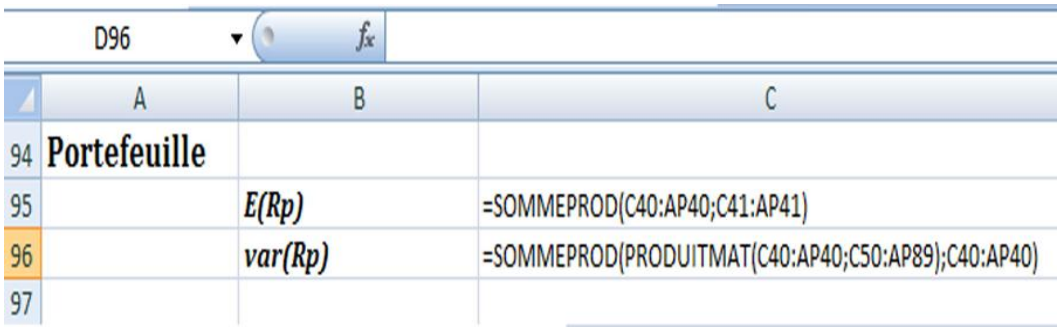


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
38			*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
39			**AC.PA**	**ACA**	**AI.PA**	**ALO**	**ALU.P**	**BN.PA**	**BNP.P**	**CA.PA**	**CAP.P**	**CS.PA**	**DG.PA**	**EAD.P**	**EDF.P**	**EI.PA**	**EN.PA**	**FP.PA**	**FTE.P**	**GLE.P**	**GSZ.P**
40		X_i	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%
41		μ_i	0,014	0,041	0,01086	-7E-04	-0,041	0,0049	0,03	0,004	0,023	0,013	7E-04	0,009	-3E-04	0,027	-0,014	-4E-04	-0,012	0,026	-0,012
42		*Var*	0,005	0,033	0,00057	0,008	0,045	0,0014	0,013	0,009	0,01	0,01	0,006	0,009	0,006	0,003	0,002	0,003	0,005	0,018	0,008

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
38	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*
39	**KN.PA**	**LG.PA**	**MC.PA**	**ML.PA**	**MT.PA**	**OR.PA**	**PP.PA**	**PUB.PA**	**RI.PA**	**RNO**	**SAN**	**SEV.PA**	**SGO**	**STM.PA**	**SU.PA**	**TEC.PA**	**UG.PA**	**UL.PA**	**VIE.PA**	**VIV.PA**	**VK.**
40	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%	2,50%
41	0,023	0,043	0,002	0,032	0,044	0,022	0,014	0,0149	0,018	0,024	0,019	-0,006	-0,015	0,0101	0,011	0,03278	-0,083	0,026	0,014	0,013	-0,03
42	0,019	0,01	0,002	0,005	0,048	0,001	0,003	0,0031	0,001	0,011	0,007	0,0053	0,007	0,02	0,004	0,0065	0,012	0,002	0,021	0,005	0,019

(5)

Le calcul de l'espérance et de la variance du portefeuille:



	A	B	C
94	**Portefeuille**		
95		***E(Rp)***	=SOMMEPROD(C40:AP40;C41:AP41)
96		***var(Rp)***	=SOMMEPROD(PRODUITMAT(C40:AP40;C50:AP89);C40:AP40)
97			

(6)

Dans notre cas, il s'agit de faire la somme des produits terme à terme de deux plages de cellules (X_i et $\hat{\mu}_i$) ayant la même dimension (même nombre de lignes et même nombre de colonnes). Nous pouvons alors utiliser la fonction suivant dans MS Excel :

=SOMMEPROD (C40:AP40;C41:AP41)

Pour la variance du portefeuille, c'est un peu plus compliqué puisqu'il s'agira de calculer :

$$V\left(R_p\right)=\sigma^2\left(R_p\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2V\left(R_i\right)+2\sum_{i\neq}\sum_{j}X_iX_j\,\mathrm{cov}\left(R_j,R_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sigma_i^2+2\sum_{i\neq}\sum_{j}X_iX_j\,\mathrm{cov}\left(R_j,R_i\right)$$

L'astuce pour appliquer ceci dans MS Excel consiste à utiliser l'algèbre linéaire et écrire cette relation sous forme matricielle comme nous l'avons démontré :

$$\sigma^2\left(R_p\right)=X^T\cdot c_{ij}\cdot X$$

Ce qui équivaut dans MS Excel à écrire :

=SOMMEPROD(PRODUITMAT(B14:D14;G14:I16);B14:D14)

Donc en se basant sur les tableaux précédents, il est simple dans MS Excel d'obtenir la matrice de covariance :

D53 fx =COVARIANCE(F25:F33;D25:D33)

	B	C	D	E	F
48	**Cij**	***T1***	***T2***	***T3***	***T4***
49					
50	**T1**	=VAR(C25:C33)	=COVARIANCE(C25:C33;D25:D33)	=COVARIANCE(C25:C33;E25:E33)	=COVARIANCE(C25:C33;F25:F33)
51	**T2**	=COVARIANCE(D25:D33;C25:C33)	=VAR(D25:D33)	=COVARIANCE(D25:D33;E25:E33)	=COVARIANCE(D25:D33;F25:F33)
52	**T3**	=COVARIANCE(E25:E33;C25:C33)	=COVARIANCE(E25:E33;D25:D33)	=VAR(E25:E33)	=COVARIANCE(E25:E33;F25:F33)
53	**T4**	=COVARIANCE(F25:F33;C25:C33)	=COVARIANCE(F25:F33;D25:D33)	=COVARIANCE(F25:F33;E25:E33)	=VAR(F25:F33)
54	**T5**	=COVARIANCE(G25:G33;C25:C33)	=COVARIANCE(G25:G33;D25:D33)	=COVARIANCE(G25:G33;E25:E33)	=COVARIANCE(G25:G33;F25:F33)
55	**T6**	=COVARIANCE(H25:H33;C25:C33)	=COVARIANCE(H25:H33;D25:D33)	=COVARIANCE(H25:H33;E25:E33)	=COVARIANCE(H25:H33;F25:F33)
56	**T7**	=COVARIANCE(I25:I33;C25:C33)	=COVARIANCE(I25:I33;D25:D33)	=COVARIANCE(I25:I33;E25:E33)	=COVARIANCE(I25:I33;F25:F33)
57	**T8**	=COVARIANCE(J25:J33;C25:C33)	=COVARIANCE(J25:J33;D25:D33)	=COVARIANCE(J25:J33;E25:E33)	=COVARIANCE(J25:J33;F25:F33)
58	**T9**	=COVARIANCE(K25:K33;C25:C33)	=COVARIANCE(K25:K33;D25:D33)	=COVARIANCE(K25:K33;E25:E33)	=COVARIANCE(K25:K33;F25:F33)
59	**T10**	=COVARIANCE(L25:L33;C25:C33)	=COVARIANCE(L25:L33;D25:D33)	=COVARIANCE(L25:L33;E25:E33)	=COVARIANCE(L25:L33;F25:F33)
60	**T11**	=COVARIANCE(M25:M33;C25:C33)	=COVARIANCE(M25:M33;D25:D33)	=COVARIANCE(M25:M33;E25:E33)	=COVARIANCE(M25:M33;F25:F33)
61	**T12**	=COVARIANCE(N25:N33;C25:C33)	=COVARIANCE(N25:N33;D25:D33)	=COVARIANCE(N25:N33;E25:E33)	=COVARIANCE(N25:N33;F25:F33)
62	**T13**	=COVARIANCE(O25:O33;C25:C33)	=COVARIANCE(O25:O33;D25:D33)	=COVARIANCE(O25:O33;E25:E33)	=COVARIANCE(O25:O33;F25:F33)
63	**T14**	=COVARIANCE(P25:P33;C25:C33)	=COVARIANCE(P25:P33;D25:D33)	=COVARIANCE(P25:P33;E25:E33)	=COVARIANCE(P25:P33;F25:F33)
64	**T15**	=COVARIANCE(Q25:Q33;C25:C33)	=COVARIANCE(Q25:Q33;D25:D33)	=COVARIANCE(Q25:Q33;E25:E33)	=COVARIANCE(Q25:Q33;F25:F33)
65	**T16**	=COVARIANCE(R25:R33;C25:C33)	=COVARIANCE(R25:R33:D25:D33)	=COVARIANCE(R25:R33:E25:E33)	=COVARIANCE(R25:R33:F25:F33)

(7)

Soit :

C40 : 0,025

Cij	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	T20	T21
T1	0,00531	0,001324	0,000251	0,003905	0,003392	0,00075	0,003	0,002	0,005	8E-04	0,002	0,002	0,002	8E-04	1E-03	0,001	0,001	0,003	-1E-04	0,005	0,004
T2	0,001324	0,033156	0,001328	0,008959	0,004883	-0,002264	0,016	0,011	0,007	0,014	0,006	0,003	0,005	-0,002	0,003	0,005	0,002	0,017	0,009	0,017	0,008
T3	0,000251	0,001328	0,000573	0,000335	0,001913	-0,000176	0,001	8E-04	0,001	0,001	6E-04	-3E-04	4E-04	7E-04	-1E-05	3E-04	2E-04	1E-03	5E-04	0,001	0,001
T4	0,003905	0,008959	0,000335	0,008003	0,004828	8,1E-05	0,007	0,006	0,005	0,005	0,004	0,003	0,004	-0,001	0,002	0,004	0,003	0,008	0,003	0,007	0,005
T5	0,003392	0,004883	0,001913	0,004828	0,044846	0,002233	0,011	0,006	0,012	0,008	0,01	6E-04	0,007	0,005	0,002	0,002	0,002	0,016	8E-04	0,013	0,01
T6	0,00075	-0,002264	-0,00018	8,1E-05	0,002233	0,001376	-8E-04	2E-04	2E-04	-9E-04	-1E-04	0,001	-0,001	2E-04	-5E-04	-1E-04	-3E-04	-3E-04	-0,001	-7E-04	-9E-04
T7	0,002897	0,016079	0,001149	0,007135	0,011318	-0,000771	0,013	0,008	0,008	0,009	0,006	0,002	0,005	3E-04	0,003	0,004	0,003	0,013	0,005	0,013	0,008
T8	0,002135	0,011089	0,00081	0,006037	0,006188	0,000159	0,008	0,009	0,004	0,006	0,003	0,003	0,002	-0,001	0,001	0,004	0,003	0,009	0,004	0,007	0,005
T9	0,00507	0,00731	0,001176	0,005062	0,011544	0,000186	0,008	0,004	0,01	0,005	0,005	2E-04	0,004	0,002	0,002	0,002	7E-04	0,008	9E-04	0,011	0,008
T10	0,000844	0,014086	0,001152	0,004744	0,0083	-0,000886	0,009	0,006	0,005	0,009	0,005	0,003	0,004	7E-04	0,002	0,002	0,003	0,01	0,006	0,01	0,006
T11	0,002153	0,005848	0,000586	0,00383	0,010341	-0,000103	0,006	0,003	0,005	0,005	0,006	0,003	0,004	0,001	0,002	0,002	0,003	0,007	0,004	0,007	0,005
T12	0,001632	0,002553	-0,00031	0,002887	0,000571	0,001242	0,002	0,003	2E-04	0,003	0,003	0,009	2E-04	6E-05	0,001	7E-04	0,004	0,002	0,004	0,003	8E-04
T13	0,002088	0,005048	0,00038	0,003862	0,007338	-0,001015	0,005	0,002	0,004	0,004	0,004	2E-04	0,006	6E-04	0,003	0,002	0,002	0,006	0,003	0,006	0,005
T14	0,000808	-0,001846	0,000685	-0,00105	0,005075	0,000241	3E-04	-0,001	0,002	7E-04	0,001	6E-05	6E-04	0,003	1E-04	-1E-03	-4E-04	-5E-04	-1E-04	0,002	0,002
T15	0,000993	0,002859	-1,1E-05	0,00207	0,002223	-0,00053	0,003	0,001	0,002	0,002	0,002	0,001	0,003	1E-04	0,002	7E-04	0,002	0,003	0,002	0,003	0,002
T16	0,001381	0,00498	0,000312	0,003623	0,002425	-0,000136	0,004	0,004	0,002	0,002	0,002	7E-04	0,002	-1E-03	7E-04	0,003	0,002	0,005	0,002	0,003	0,003
T17	0,001078	0,002448	0,000202	0,003413	0,001643	-0,000251	0,003	0,003	7E-04	0,003	0,003	0,004	0,002	-4E-04	0,002	0,002	0,005	0,003	0,004	0,002	0,003
T18	0,003035	0,017378	0,000971	0,008405	0,015886	-0,000287	0,013	0,009	0,008	0,01	0,007	0,002	0,006	-5E-04	0,003	0,005	0,003	0,018	0,005	0,013	0,009
T19	-0,00014	0,008619	0,00047	0,003493	0,000836	-0,001295	0,005	0,004	9E-04	0,006	0,004	0,004	0,003	-1E-04	0,002	0,002	0,004	0,005	0,008	0,005	0,003

C40 : 0,025

T20	0,004735	0,017094	0,00149	0,006949	0,013201	-0,000665	0,013	0,007	0,011	0,01	0,007	0,003	0,006	0,002	0,003	0,003	0,002	0,013	0,005	0,019	0,01
T21	0,003721	0,008218	0,001345	0,004967	0,010114	-0,000854	0,008	0,005	0,008	0,006	0,005	8E-04	0,005	0,002	0,002	0,003	0,003	0,009	0,003	0,01	0,01
T22	0,000134	0,002628	-0,00028	0,001765	3,27E-05	0,000568	0,001	0,002	-6E-04	0,002	0,001	0,004	-1E-04	-9E-04	5E-04	8E-04	0,002	0,002	0,002	9E-04	-1E-04
T23	0,001765	0,006956	3,14E-05	0,002312	-0,004952	-0,000719	0,003	0,002	0,002	0,003	1E-03	0,002	9E-04	-3E-04	0,001	6E-04	6E-04	0,002	0,002	0,005	0,002
T24	0,005129	0,013283	0,00146	0,003036	0,001099	-0,002988	0,008	0,001	0,012	0,002	9E-05	-0,011	0,004	9E-04	4E-04	0,002	-0,006	0,007	-0,004	0,013	0,009
T25	0,001245	-0,000986	0,000107	0,000539	0,000304	0,000641	-6E-05	6E-04	8E-04	7E-05	4E-04	0,002	-4E-04	6E-04	-4E-05	2E-07	7E-04	-3E-04	1E-04	7E-04	5E-04
T26	0,001642	0,00241	-0,00048	0,002474	-0,000807	0,000795	0,001	0,003	8E-04	6E-04	6E-04	0,003	-1E-04	-0,001	3E-04	0,001	0,001	0,002	3E-04	0,002	8E-04
T27	0,002488	0,003155	0,000486	0,002649	0,001191	0,000442	0,002	0,003	0,003	0,001	3E-04	3E-04	2E-05	-2E-04	-3E-04	0,002	2E-04	0,003	-6E-04	0,003	0,003
T28	0,001744	-7,02E-05	0,000281	0,001504	0,00197	6,81E-06	0,001	6E-04	0,002	5E-04	0,001	3E-04	0,001	6E-04	6E-04	6E-04	9E-04	0,001	5E-04	0,002	0,002
T29	0,003707	0,001341	0,000445	0,004291	0,010419	0,002145	0,004	0,006	0,005	0,001	0,002	0,002	3E-04	-1E-04	-4E-04	0,003	0,001	0,006	-0,002	0,004	0,004
T30	0,003514	0,009783	0,000602	0,005431	0,002894	-0,000879	0,007	0,004	0,006	0,005	0,004	0,002	0,004	4E-04	0,003	0,002	0,002	0,007	0,004	0,009	0,005
T31	0,003818	0,003516	0,000414	0,003532	0,00456	0,001397	0,003	0,003	0,005	0,002	0,002	0,003	3E-04	8E-04	1E-04	0,001	6E-04	0,004	-9E-05	0,005	0,003
T32	-0,00033	0,010212	0,000384	0,002847	0,008502	-0,000404	0,007	0,003	0,003	0,006	0,004	8E-04	0,003	2E-04	0,002	0,001	6E-04	0,008	0,003	0,007	0,002
T33	0,002273	0,010878	0,000861	0,005476	0,013546	0,000735	0,009	0,009	0,005	0,009	0,007	0,008	0,003	7E-04	0,002	0,003	0,005	0,012	0,005	0,011	0,008
T34	0,000839	0,005077	-0,0002	0,003716	0,003309	0,000601	0,004	0,004	9E-04	0,003	0,002	0,003	0,001	-0,002	9E-04	0,002	0,003	0,005	0,002	0,002	0,002
T35	0,004223	0,005747	0,000176	0,004284	0,004597	0,000439	0,005	0,003	0,005	0,004	0,004	0,004	0,003	0,001	0,002	0,001	0,002	0,005	0,002	0,008	0,004
T36	0,002014	0,010005	0,000616	0,004348	0,015327	-0,000261	0,009	0,005	0,007	0,006	0,005	-0,001	0,005	4E-04	0,002	0,002	3E-05	0,011	9E-04	0,01	0,007
T37	0,000535	0,003953	0,00029	0,001756	-0,000767	-0,000705	0,002	0,002	1E-03	0,002	0,001	0,002	0,001	-3E-04	9E-04	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003
T38	0,002648	0,002145	0,000887	-0,0009	0,005301	0,00079	0,003	-1E-04	0,005	0,004	0,004	0,006	4E-04	0,005	0,001	-0,002	5E-04	7E-04	0,002	0,009	0,004
T39	0,000295	0,001469	-0,00022	0,00284	0,000419	-0,001041	0,002	0,001	8E-05	7E-04	0,001	-8E-04	0,003	-0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,002	-4E-04	0,002
T40	0,003757	0,016537	-0,00029	0,009103	-0,002088	-0,000386	0,01	0,007	0,004	0,008	0,004	0,006	0,004	-0,003	0,003	0,004	0,004	0,01	0,007	0,009	0,004

(8)

AR61

T22	T23	T24	T25	T26	T27	T28	T29	T30	T31	T32	T33	T34	T35	T36	T37	T38	T39	T40			
1E-04	0,002	0,005	0,001	0,002	0,00249	0,002	0,004	0,004	0,0038	-3E-04	0,00227	8E-04	0,00422	0,002	5E-04	0,003	3E-04	0,004			
0,003	0,007	0,013	-1E-03	0,002	0,00316	-7E-05	0,001	0,01	0,0035	0,01	0,01088	0,005	0,00575	0,01	0,004	0,002	0,001	0,017			
-3E-04	3E-05	0,001	1E-04	-5E-04	0,00049	3E-04	4E-04	6E-04	0,0004	4E-04	0,00086	-2E-04	0,00018	6E-04	3E-04	9E-04	-2E-04	-3E-04			
0,002	0,002	0,003	5E-04	0,002	0,00265	0,002	0,004	0,005	0,0035	0,003	0,00548	0,004	0,00428	0,004	0,002	-9E-04	0,003	0,009			
3E-05	-0,005	0,001	3E-04	-8E-04	0,00119	0,002	0,01	0,003	0,0046	0,009	0,01355	0,003	0,0046	0,015	-8E-04	0,005	4E-04	-0,002			
6E-04	-7E-04	-0,003	6E-04	8E-04	0,00044	7E-06	0,002	-9E-04	0,0014	-4E-04	0,00073	6E-04	0,00044	-3E-04	-7E-04	8E-04	-0,001	-4E-04			
0,001	0,003	0,008	-6E-05	0,001	0,00235	0,001	0,004	0,007	0,0035	0,007	0,00919	0,004	0,00522	0,009	0,002	0,003	0,002	0,01			
0,002	0,002	0,001	6E-04	0,003	0,00303	6E-04	0,006	0,004	0,0035	0,003	0,00853	0,004	0,00286	0,005	0,002	-1E-04	0,001	0,007			
-6E-04	0,002	0,012	8E-04	8E-04	0,00312	0,002	0,005	0,006	0,0045	0,003	0,00543	9E-04	0,00547	0,007	1E-03	0,005	8E-05	0,004			
0,002	0,003	0,002	7E-05	6E-04	0,00103	5E-04	0,001	0,005	0,0021	0,006	0,00855	0,003	0,0036	0,006	0,002	0,004	7E-04	0,008			
0,001	1E-03	9E-05	4E-04	6E-04	0,00031	0,001	0,002	0,004	0,0019	0,004	0,00675	0,002	0,00387	0,005	0,001	0,004	0,001	0,004			
0,004	0,002	-0,011	0,002	0,003	0,0003	3E-04	0,002	0,002	0,003	8E-04	0,00763	0,003	0,00366	-0,001	0,002	0,006	-8E-04	0,006			
-1E-04	9E-04	0,004	-4E-04	-1E-04	2,4E-05	0,001	3E-04	0,004	0,0003	0,003	0,00325	0,001	0,003	0,005	0,001	4E-04	0,003	0,004			
-9E-04	-3E-04	9E-04	6E-04	-0,001	-0,0002	6E-04	-1E-04	4E-04	0,0008	2E-04	0,00068	-0,002	0,00105	4E-04	-3E-04	0,005	-0,002	-0,003			
5E-04	0,001	4E-04	-4E-05	3E-04	-0,0003	6E-04	-4E-04	0,003	0,0001	0,002	0,00215	9E-04	0,00194	0,002	9E-04	0,001	0,002	0,003			
8E-04	6E-04	0,002	2E-07	0,001	0,00156	6E-04	0,003	0,002	0,0014	0,001	0,00278	0,002	0,00115	0,002	0,001	-0,002	0,002	0,004			
0,002	6E-04	-0,006	7E-04	0,001	0,00024	9E-04	0,001	0,002	0,0006	6E-04	0,00485	0,003	0,00155	3E-05	0,002	5E-04	0,003	0,004			
0,002	0,002	0,007	-3E-04	0,002	0,00271	0,001	0,006	0,007	0,0039	0,008	0,01155	0,005	0,0054	0,011	0,002	7E-04	0,003	0,01			
0,002	0,002	-0,004	1E-04	3E-04	-0,0006	5E-04	-0,002	0,004	-9E-05	0,003	0,0052	0,002	0,00209	9E-04	0,002	0,002	0,002	0,007			

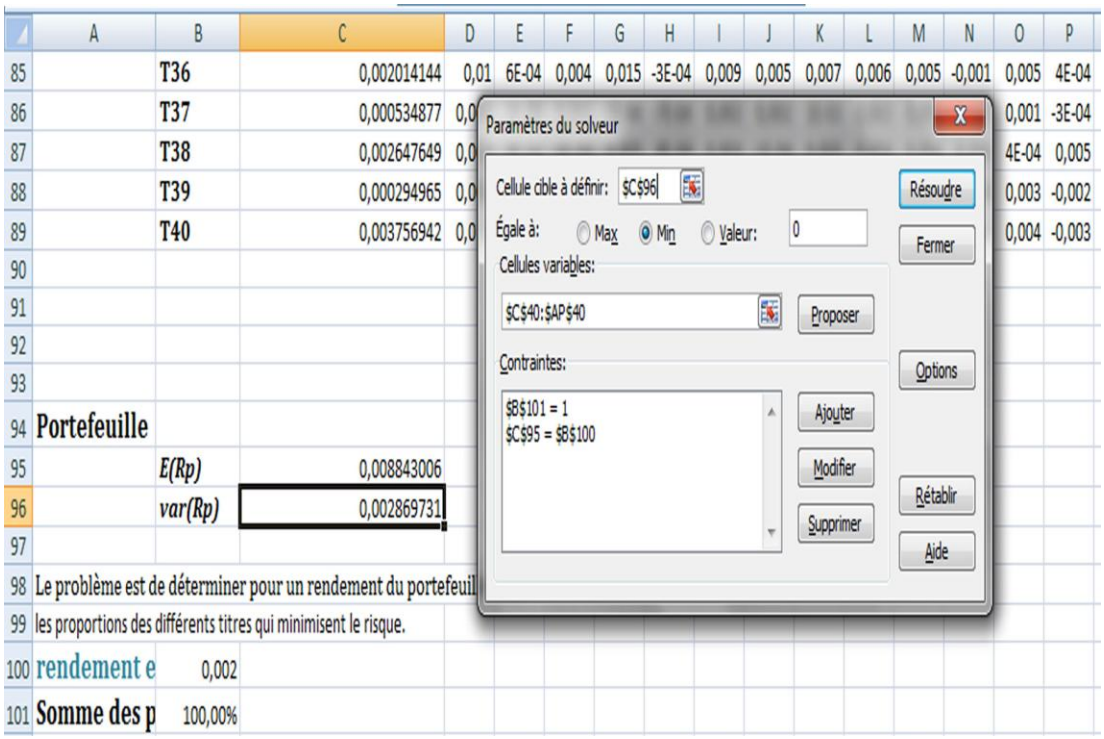
AR61

X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP			
9E-04	0,005	0,013	7E-04	0,002	0,00303	0,002	0,004	0,009	0,0053	0,007	0,01092	0,002	0,00796	0,01	0,003	0,009	-4E-04	0,009			
-1E-04	0,002	0,009	5E-04	8E-04	0,00264	0,002	0,004	0,005	0,0029	0,002	0,00828	0,002	0,00444	0,007	0,003	0,004	0,002	0,004			
0,002	8E-04	-0,006	6E-04	0,002	0,00017	-2E-04	0,001	7E-04	0,0011	1E-03	0,00382	0,002	0,0011	-2E-04	8E-04	1E-03	2E-04	0,004			
8E-04	0,005	0,005	5E-04	0,001	0,00113	3E-04	-1E-03	0,004	0,0017	9E-04	0,00193	5E-04	0,00327	3E-04	0,002	0,004	-5E-04	0,006			
-0,006	0,005	0,048	-0,002	-0,001	0,00492	0,002	-1E-04	0,007	0,0023	0,002	-0,0045	-0,004	0,00426	0,01	6E-04	-9E-04	3E-05	0,002			
6E-04	5E-04	-0,002	0,001	8E-04	0,0007	4E-04	0,001	4E-04	0,0015	-9E-04	0,00169	3E-04	0,00122	-9E-04	3E-04	0,003	-9E-04	6E-04			
0,002	0,001	-0,001	8E-04	0,003	0,00138	2E-05	0,003	0,001	0,0022	-1E-04	0,00391	0,003	0,00212	8E-04	9E-04	6E-04	9E-05	0,004			
2E-04	0,001	0,005	7E-04	0,001	0,00311	7E-04	0,004	0,002	0,0028	-4E-04	0,00233	0,001	0,00172	0,001	7E-04	2E-04	-3E-04	0,002			
-2E-04	3E-04	0,002	4E-04	2E-05	0,00071	0,001	1E-03	0,002	0,001	-2E-04	0,00054	7E-06	0,00134	7E-04	3E-04	7E-04	7E-04	9E-04			
0,001	-1E-03	-1E-04	0,001	0,003	0,0038	1E-03	0,011	7E-04	0,0049	-2E-04	0,00775	0,004	0,00253	0,004	7E-04	9E-07	-8E-05	0,002			
7E-04	0,004	0,007	4E-04	0,001	0,00168	0,002	7E-04	0,007	0,0027	0,003	0,00418	0,002	0,00496	0,004	0,002	0,003	0,002	0,008			
0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,00285	1E-03	0,005	0,003	0,0053	6E-04	0,00448	0,002	0,00393	0,002	5E-04	0,004	-0,002	0,004			
1E-03	9E-04	0,002	-9E-04	-1E-04	-0,0004	-2E-04	-2E-04	0,003	0,0006	0,007	0,00377	0,002	0,002	0,006	2E-04	9E-04	7E-04	0,005			
0,004	0,002	-0,005	0,002	0,004	0,00233	5E-04	0,008	0,004	0,0045	0,004	0,02	0,006	0,00534	0,007	0,004	0,008	-1E-04	0,006			
0,002	5E-04	-0,004	3E-04	0,003	0,00107	7E-06	0,004	0,002	0,0017	0,002	0,00581	0,004	0,00158	0,002	0,001	-0,001	0,001	0,005			
0,001	0,003	0,004	0,001	0,002	0,00172	0,001	0,003	0,005	0,0039	0,002	0,00534	0,002	0,0065	0,003	0,001	0,006	-3E-04	0,006			
-2E-04	3E-04	0,01	-9E-04	8E-04	0,00149	7E-04	0,004	0,004	0,002	0,006	0,00692	0,002	0,00345	0,012	8E-04	7E-05	0,002	0,003			
8E-04	0,002	6E-04	3E-04	9E-04	0,00073	3E-04	7E-04	0,002	0,0005	2E-04	0,00392	0,001	0,00122	8E-04	0,002	0,001	9E-04	0,003			
1E-03	0,004	-9E-04	0,003	6E-04	0,00018	7E-04	9E-07	0,003	0,0041	9E-04	0,00826	-0,001	0,00619	7E-05	0,001	0,021	-0,006	8E-04			
2E-04	-5E-04	3E-05	-9E-04	9E-05	-0,0003	7E-04	-8E-05	0,002	-0,002	7E-04	-0,0001	0,001	-0,0003	0,002	9E-04	-0,006	0,005	0,003			
0,004	0,006	0,002	6E-04	0,004	0,00224	9E-04	0,002	0,008	0,0041	0,005	0,00634	0,005	0,00642	0,003	0,003	8E-04	0,003	0,019			

(9)

Rappel : La matrice des covariances est symétrique.

A l'aide du solveur, nous allons définir la cellule cible
C96 = SOMMEPROD(PRODUITMAT(C40:AP40;C50:AP89);C40:AP40)



(10)

Pour avoir la droite formée par l'ensemble des portefeuilles contenant un actif sans risque, nous avons automatisé la recherche de solutions pour avoir les points composants la droite notamment en faisant varier le rendement de l'actif sans risque.

	A	B
121		
122	$R_f =$	0,002
123	a=	0,0713
124	b=	-0,0011
125	c=	0,00004
126	$\Delta =$	=B124/(B123*B122)+2*B125/(B122*B122*B123)+1-B124*B124/(4*B123*B123*B122*B122)
127	$\sqrt{\Delta} =$	=RACINE(B126)
128	$b_1' =$	=-B122*B124/2-B123*B122*B122+B123*B122*B122*B127
129	$b_2' =$	=-B122*B124/2-B123*B122*B122-B123*B122*B122*B127
130	$a_1' =$	=-B128/B122
131	$a_2' =$	=-B129/B122
132		

(11)

Ce qui nous donne :

	D	E
129	x_{M1} =	=(-B128/B122-B124)/(2*B123)
130	x_{M2} =	=(-B129/B122-B124)/(2*B123)
131		

	A	B	C	D	E
121					
122	R_f =	0,002			
123	a=	0,0713			
124	b=	-0,0011			
125	c=	4,00E-05			
126	Δ =	2,59E+02			
127	$\sqrt{\Delta}$ =	16,09083647			
128	b_1' =	5,40391E-06			
129	b_2' =	-3,7743E-06		x_{M1} =	-0,011233894
130	a_1' =	-0,00270195		x_{M2} =	0,020947779
131	a_2' =	0,001887153			
132					

(12)

La solution 1 est à éliminer car $x_{M1} \leq 0$.
Le portefeuille optimal obtenu après notre démarche est :

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
38		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
39		AC.PA	ACA	AI.PA	ALO	ALU.P	BN.PA	BNP.P	CA.PA	CAP.P	CS.PA	DG.PA	EAD.P	EDF.P	EI.PA	EN.PA	FP.PA	FTE.P	GLE.P	GSZ.P
40	X_i	-3,56%	1,11%	30,39%	-3,38%	-0,72%	19,33%	0,76%	-2,93%	-1,62%	-1,30%	-0,96%	-1,66%	1,64%	7,75%	3,73%	0,01%	-6,55%	1,24%	-2,44%

	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP
38	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
39	KN.PA	LG.PA	MC.P	ML.P	MT.P	OR.PA	PP.PA	PUB.PA	RI.PA	RNO	SAN	SEV.P	SGO	STM.P	SU.PA	TEC.P	UG.PA	UL.PA	VIE.PA	VIV.P	VK
40	-0,98%	-0,87%	7,48%	5,98%	1,32%	13,43%	8,44%	-1,44%	12,40%	-0,77%	-1,22%	-6,60%	5,39%	-1,63%	5,84%	1,47%	-2,24%	8,98%	-1,62%	7,84%	-2,03%

(13)