Objectif
Approcher la courbe de la fonction racine carrée lors de l'étude d'un problème d'aire.

1 Réaliser une décoration murale

Une décoratrice d'intérieur doit réaliser une frise rectangulaire de **1 m de long** avec des faïences **carrées de même côté** et sans découpe.

On se propose d'aider cette décoratrice en fonction des options choisies.

1 Première option

Elle envisage de poser des faïences toutes de couleurs différentes issues du catalogue ci-dessous.

Références du fournisseur	C4000	C1225	C2500	C4225	C7225	C10000
Surface d'un carreau (en cm^2)	4	12,25	25	42,25	72,25	100
Nombre de coloris disponibles	20	20	15	15	10	10

Parmi ces six références, laquelle (ou lesquelles) peut choisir la décoratrice ?

2 Deuxième option

Elle envisage de se servir chez un artisan qui produit des faïences du côté souhaité à condition que leur surface S soit inférieure à 100 cm^2.

a) Exprimer le côté d'un carreau en fonction de S.

b) Représenter à l'écran d'une calculatrice la fonction $S \mapsto \sqrt{S}$ sur l'intervalle $[0\,;100]$ en précisant la fenêtre graphique choisie.

c) La décoratrice souhaite des carreaux de surface comprise entre 20 cm^2 et 50 cm^2. S'aider du graphique précédent pour donner un encadrement du côté du carreau.

Objectif
Approcher la courbe d'une fonction cube dans une situation concrète.

2

La puissance P, en kW, fournie par une éolienne est indiquée ci-dessous en fonction de la vitesse v, en m/s, du vent.

- Lorsque $v \in [0\,;4[$: $P = 0$; l'éolienne est arrêtée.
- Lorsque $v \in [4\,;14[$: $P = \dfrac{v^3}{4}$; l'éolienne fonctionne normalement.
- Lorsque $v \geqslant 14$: $P = 686$ ou $P = 0$; la puissance est plafonnée ou l'éolienne arrêtée.

On se propose de déterminer graphiquement la vitesse du vent lorsque l'on dispose de la puissance fournie par cette éolienne.

Le 28 janvier 2010, le vent a soufflé de plus en plus fort du matin au soir. Le relevé des vitesses du vent est indiqué dans le tableau ci-dessous.

Heure	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
Vitesse du vent (en m/s)	4	4,2	4,5	4,8	5	6	8	10	12	13

a) Déterminer la puissance fournie par cette éolienne pour chacune de ces heures-là.

b) Représenter les points de coordonnées $(v\,;P)$ dans un repère (en abscisses : 1 cm pour 1 m/s ; en ordonnées : 1 cm pour 50 kW).

c) Déterminer graphiquement à quelle vitesse soufflait le vent ce jour-là lorsque la puissance de cette éolienne était :

- $P = 512,1$
- $P = 182,25$
- $P = 671,4$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$

DÉFINITION La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, qui, à tout nombre réel x positif ou nul, associe sa racine carrée $\sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.

Remarques

- $\sqrt{0} = 0$.
- Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} \geqslant \mathbf{0}$.

1 Sens de variation de la fonction racine carrée

PROPRIÉTÉ La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **croissante sur** $[0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	

DÉMONSTRATION

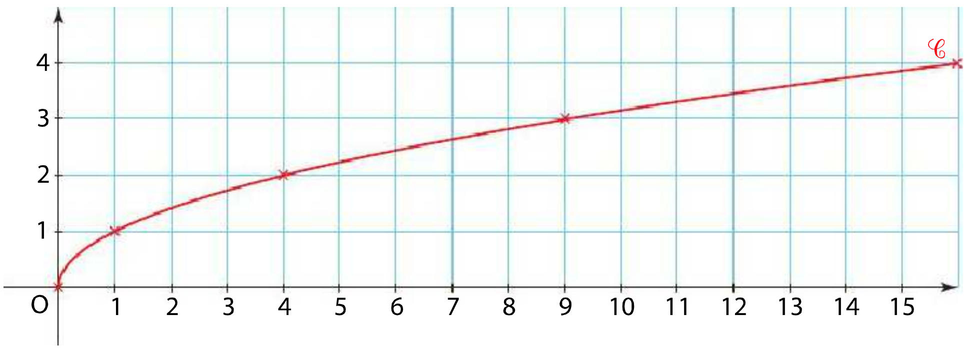
En classe de Seconde, on a vu que deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

Donc, si $0 \leqslant u \leqslant v$, c'est-à-dire si $(\sqrt{u})^2 \leqslant (\sqrt{v})^2$, alors $\sqrt{u} \leqslant \sqrt{v}$.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

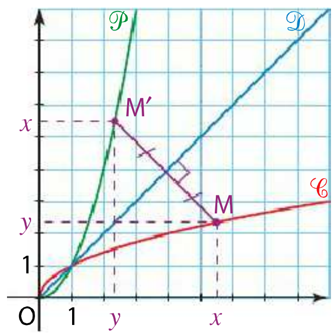
2 Représentation graphique de la fonction racine carrée

Dans un repère orthogonal, la fonction racine carrée est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.



PROPRIÉTÉ Dans un repère **orthonormé**, $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$ et $\mathscr{P}$ est la courbe représentative de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$.

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$.



DÉMONSTRATION

x et y désignent des nombres réels positifs.

$y = \sqrt{x}$ équivaut à $x = y^2$, c'est-à-dire que le point $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, le point $\mathrm{M}'(y\,;x)$ appartient à $\mathscr{P}$.

Conséquence : $\mathscr{C}$ est une demi-parabole de sommet O.

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{x \geqslant 0}$ **et** $\boldsymbol{y \geqslant 0}$, $\boldsymbol{\sqrt{x} = y}$ **équivaut à** $\boldsymbol{x = y^2}$.

Les méthodes

Exercice résolu 1 Comparer les racines carrées de nombres positifs

Voir aussi exercice 26 page 47

Énoncé

Comparer les nombres suivants sans les calculer :

$$\sqrt{1{,}001} \quad \text{et} \quad \sqrt{1{,}0007}$$

Solution

1,001 et 1,0007 sont deux nombres réels positifs tels que $1{,}001 > 1{,}0007$.
Or la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc de $1{,}001 > 1{,}0007$ on déduit que $\sqrt{1{,}001} > \sqrt{1{,}0007}$.

MÉTHODE

D'après le sens de variation de la fonction racine carrée, deux nombres réels positifs et leurs racines carrées sont rangés **dans le même ordre**.

Exercice résolu 2 Utiliser la courbe de la fonction racine carrée

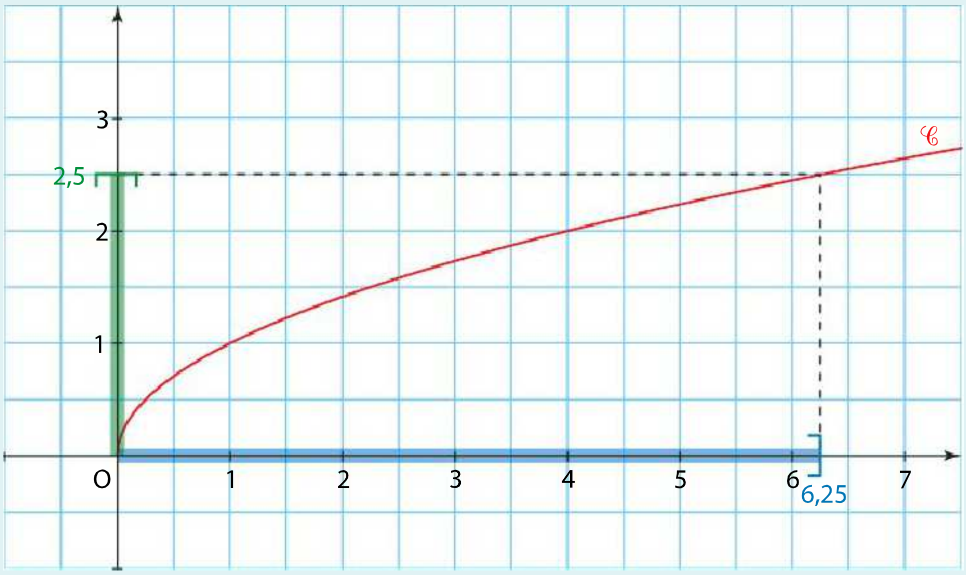
Voir aussi exercice 27 page 47

Énoncé

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant 2{,}5$ en s'aidant de la courbe de la fonction racine carrée.

Solution

1. On trace la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction racine carrée dans un repère.



2. On place 2,5 sur l'axe des ordonnées et le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 2,5. Son abscisse est $2{,}5^2 = 6{,}25$. On la note sur l'axe des abscisses.

3. On visualise (en vert) sur l'axe des ordonnées les nombres positifs ou nuls inférieurs ou égaux à 2,5.

4. On lit sur l'axe des abscisses (en bleu) les nombres dont la racine carrée appartient à la partie verte de l'axe des ordonnées.

5. On conclut :
l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant 2{,}5$ est l'intervalle $[0\,;6{,}25]$.

Commentaire

Lorsque a est un nombre réel positif, l'équation $\sqrt{x} = a$ admet pour solution $x = a^2$.

La fonction $x \longmapsto x^3$

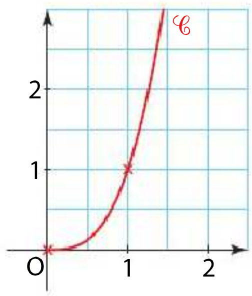
DÉFINITION La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui, à tout nombre réel x, associe son cube x^3, est appelée **fonction cube**.

1 Sens de variation et courbe sur $[0\,;+\infty[$

PROPRIÉTÉ La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est **croissante sur $[0\,;+\infty[$**.

DÉMONSTRATION

u et v désignent deux nombres réels positifs.
La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc :
si $u \leqslant v$ **(1)**, alors $u^2 \leqslant v^2$ **(2)**.
En multipliant chaque nombre de **(1)** par u^2, on obtient $u^2 \times u \leqslant u^2 \times v$, et en multipliant chaque membre de **(2)** par v, il vient $u^2 \times v \leqslant v^2 \times v$.
Par conséquent, $u^2 \times u \leqslant u^2 \times v \leqslant v^2 \times v$, d'où $u^3 \leqslant v^3$.
Ainsi, si $0 \leqslant u \leqslant v$, alors $u^3 \leqslant v^3$.
La fonction cube est croissante sur $[0\,;+\infty[$.



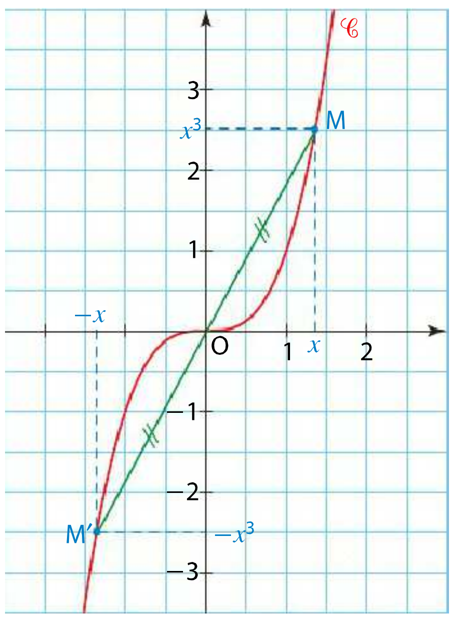
2 Courbe et tableau de variation sur $\mathbb{R}$

• Symétrie par rapport à O

PROPRIÉTÉ Dans un repère orthogonal d'origine O, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction cube est **symétrique par rapport à O**.

DÉMONSTRATION

Pour tout nombre réel x, le point $\mathrm{M}(x\,;x^3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$. Le symétrique de M par rapport à O est le point $\mathrm{M'}(-x\,;-x^3)$.
Or $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$, donc M′ appartient à $\mathscr{C}$.



• Tableau de variation

La symétrie de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'origine du repère et le fait que la fonction cube est croissante sur $[0\,;+\infty[$ permettent d'affirmer que la fonction cube est croissante sur $]-\infty\,;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

Exercice résolu 1 Comparer les cubes de nombres réels

Voir aussi exercice 39 page 47

Énoncé

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants :

a) $(-2{,}001)^3$ et $(-2{,}01)^3$

b) $(\sqrt{2}-1)^3$ et $0{,}41^3$ **Rappel** : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

Solution

a) $-2{,}001$ et $-2{,}01$ sont deux nombres tels que :

$$-2{,}01 < -2{,}001$$

Or, la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, donc, de $-2{,}01 < -2{,}001$, on déduit que :

$$(-2{,}01)^3 < (-2{,}001)^3$$

b) On sait que $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, donc :

$$\sqrt{2}-1 \approx 0{,}414 \quad \text{et} \quad \sqrt{2}-1 > 0{,}41$$

La fonction cube étant croissante sur $\mathbb{R}$, de $\sqrt{2}-1 > 0{,}41$, on déduit que :

$$(\sqrt{2}-1)^3 > 0{,}41^3.$$

MÉTHODE

D'après le sens de variation de la fonction cube, deux nombres réels quelconques et leurs cubes sont rangés dans **le même ordre**.

Exercice résolu 2 Utiliser la courbe de la fonction cube

Voir aussi exercice 40 page 47

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3 \leqslant 3{,}375$ avec la courbe de la fonction cube.

Solution

1. On trace la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction cube dans un repère.

2. On place 3,375 sur l'axe des ordonnées et le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 3,375. Son abscisse x est telle que $x^3 = 3{,}375$. On remarque à la calculatrice que :

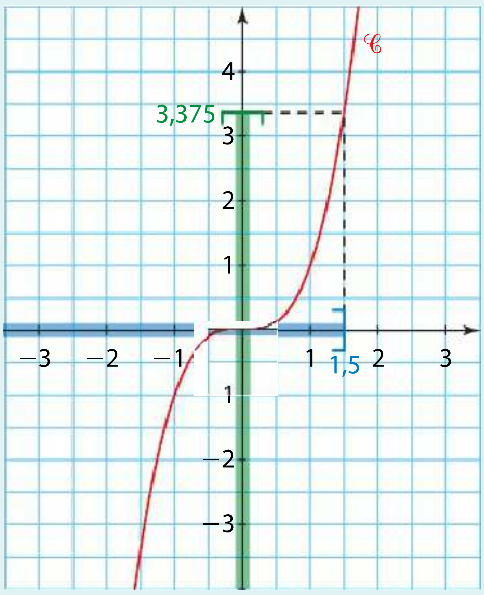
$$1{,}5^3 = 3{,}375$$

3. On visualise (en vert) sur l'axe des ordonnées les nombres inférieurs ou égaux à 3,375.

4. On lit sur l'axe des abscisses (en bleu) les nombres dont le cube appartient à la partie verte de l'axe des ordonnées.

5. On conclut :

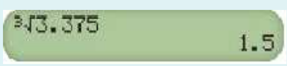
l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 \leqslant 3{,}375$ est l'intervalle $]-\infty\,;1{,}5]$.



Nombre de cube donné

Le nombre dont le cube est 3,375 est noté $\sqrt[3]{3{,}375}$ (lire « racine cubique de 3,375 »). On peut le calculer avec la calculatrice.

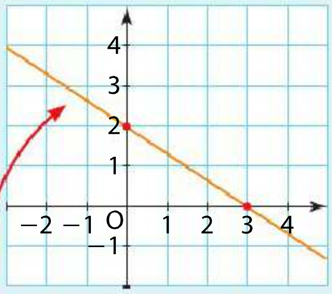
Casio	TI
Shift ($\sqrt[3]{\ }$) 3.375 EXE	MATH 4 ($\sqrt[3]{\ }$) 3.375 Entrer



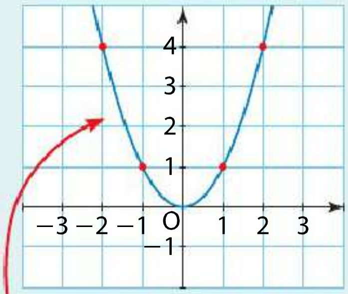
Accompagnement personnalisé

Pour comprendre

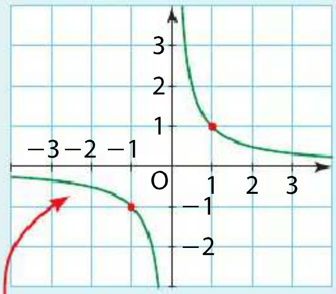
A Réaliser un herbier



Cette courbe représente la fonction … f telle que $f(x) = …$



Cette courbe représente la fonction …



Cette courbe représente la fonction …

1 Recopier les phrases ci-dessus et compléter chaque cadre. Dans les trois cas, rappeler le nom donné à chacune de ces courbes.

2 Réaliser un herbier similaire :

a) illustrant la courbe de la fonction racine carrée (*unités :* 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées) ;

b) illustrant la courbe de la fonction cube (*unités :* 2 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées).

3 Pour chaque herbier, rappeler oralement l'ensemble de définition, le sens de variation, le signe et le maximum ou minimum éventuel de chacune de ces fonctions.

Conseils
Il faut savoir reconnaître et tracer rapidement les courbes représentatives des fonctions usuelles ci-dessus et savoir les exploiter.

B Utiliser la calculatrice pour conjecturer ou vérifier

Voici un rappel de différentes fonctionnalités de la calculatrice, permettant de lire des valeurs approchées à partir du graphique.

- **Coordonnées d'un point :** TRACE puis on déplace le curseur.
- **Solution(s) de l'équation $f(x) = 0$:** G-Solv puis ROOT avec Casio ou CALC puis 2 (zéro) avec TI.
- **Maximum ou minimum de f :** G-Solv puis MAX ou MIN avec Casio ou CALC puis 3 (minimum) ou 4 (maximum) avec TI.
- **Coordonnées du point d'intersection de deux courbes :** G-Solv puis ISCT avec Casio ou CALC puis 5 (intersect) avec TI.

4 Un artisan fabrique des objets en bois. Le bénéfice, en euros, réalisé chaque semaine après la fabrication et la vente de x objets, est donné par :

$B(x) = -0{,}2x^2 + 10x - 24{,}2$ où x appartient à $[1\,;60]$

1. Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction B en précisant la fenêtre graphique.

2. Conjecturer les quantités produites pour lesquelles :

a) l'artisan réalise des profits ;

b) le bénéfice est maximal.

5 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^3 + x^2 - 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 9$.

a) Déterminer les abscisses des points d'intersection des courbes représentant f et g.

b) Vérifier les résultats à la calculatrice.

Conseils
Commencer par obtenir une représentation graphique claire des fonctions étudiées.

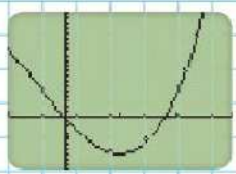
C Éviter une mauvaise lecture de la calculatrice

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

On demande de conjecturer, à l'aide de la calculatrice, les variations de *f* sur $\mathbb{R}$.
Voici la copie corrigée d'Emma et l'écran de la calculatrice qu'elle a obtenus.

D'après la calculatrice, je conjecture que :
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$
et f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
Calcule $f(-3)$ et $f(-2)$ et compare ces deux nombres.



6 Reprendre la situation de la fiche ci-dessus.
Proposer une fenêtre graphique qui permette d'obtenir la courbe de la fonction *f* à l'écran de la calculatrice.
Rectifier alors la conjecture proposée par Emma.

7 Le coût total (en euros) de production d'un objet est la fonction C définie sur $[100\,;10\,000]$ par :

$$\mathrm{C}(q) = 12\sqrt{q} - 100$$

où q est la quantité d'objets fabriqués.

a) Conjecturer à la calculatrice la quantité d'objets fabriqués pour un coût total de 620 €.

b) Calculer la quantité d'objets fabriqués pour un coût total de 620 €.

c) Expliquer la différence entre le calcul et la conjecture.

8 Le coût de production mensuel d'un objet (en euros) est une fonction C telle que :

$$\mathrm{C}(q) = 0{,}001q^3 - 1\,500 \quad \text{pour } q \in [150\,;\,500]$$

où q est la quantité d'objets fabriqués.
Afin d'assurer une certaine rentabilité à l'entreprise, il est souhaitable que le coût de production ne dépasse pas 20 000 € mensuellement.

a) Conjecturer à la calculatrice le nombre d'objets qu'elle pourra fabriquer.

b) Comparer le résultat obtenu en **a)** à la quantité exacte d'objets recherchée.

Conseils
Commencer par obtenir une représentation graphique claire de la fonction étudiée et se rappeler que la calculatrice n'affiche le plus souvent que des valeurs approchées.

D Élaborer une fiche méthode

Lorsque l'on passe d'une inégalité à une autre, il faut penser à citer la propriété utilisée (il s'agit quelquefois de préciser le sens de variation d'une fonction).

On sait que :	Propriété utilisée	On en déduit que :
• $x < 3$	On multiplie chaque membre par un nombre réel négatif, donc on change le sens de l'inégalité.	$(-2)\times x > (-2)\times 3$ $-2x > -6$
• $x \geqslant 5$	La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.	…
• $x \leqslant -2$	…	$x^2 \geqslant (-2)^2$ $x^2 \geqslant 4$

9 Reproduire et compléter les pointillés de la fiche méthode ci-dessus.

10 *Énoncé :* Que peut-on dire de x^3 lorsque $x < -3$?
Voici la copie de Camille et le commentaire de son professeur. Proposer une justification.

$x < -3$ et $(-3)^3 = -27$, donc $x^3 < -27$
à justifier

11 *f* est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -3\sqrt{x} + 4.$$

Étudier les variations de *f* sur $[0\,;+\infty[$.

Conseils
Il faut bien connaître les variations des fonctions usuelles : affines, carré, inverse, racine carrée et cube.

Vérifier les réponses p. 264

Exercices de base

Pour créer des automatismes

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

12 Dans chaque cas, calculer **mentalement** l'image du nombre réel par la fonction racine carrée.

a) 25 **b)** 100 **c)** 0 **d)** 9

13 Voici la copie d'un élève.

$\sqrt{100} = 10$ ou -10
car $10^2 = 100$ et $(-10)^2 = 100$

Expliquer la confusion et calculer correctement $\sqrt{100}$.

14 Reproduire et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous en arrondissant, éventuellement, au centième.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\sqrt{x}$							

15 Tabuler la fonction $f : x \mapsto -2\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[100\,;200]$ avec un pas de 10.

16 Calculer l'image par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ de chacun des nombres suivants, en donnant la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers positifs, puis l'arrondi au centième.

a) 32 **b)** 99 **c)** 48 **d)** 80

Aide : $\sqrt{a^2 b} = a \times \sqrt{b}$ (avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$).

17 Calculer l'image par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ de chacun des nombres suivants, en donnant la valeur exacte sous la forme $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$ où a, b et c sont des nombres entiers positifs ($c \neq 0$).

a) $\dfrac{50}{9}$ **b)** $\dfrac{1}{12}$ **c)** $\dfrac{49}{75}$ **d)** $\dfrac{125}{64}$

Aide : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $a \geqslant 0$ et $b > 0$).

18 Expliquer graphiquement pourquoi :

a) il existe un seul nombre réel dont la racine carrée est $\dfrac{3}{2}$;

b) il n'existe pas de nombre réel dont la racine carrée est -1.

19 Dans chaque cas, déterminer le ou les antécédent(s) éventuel(s) du nombre réel par la fonction racine carrée.

a) 8 **b)** $-\sqrt{10}$ **c)** $\dfrac{3}{4}$ **d)** $\sqrt{25}$

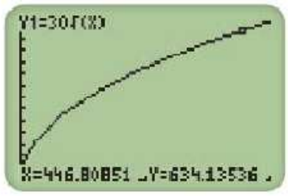
20 B est la fonction définie sur $[0\,;500]$ par :

$$B(x) = 30\sqrt{x}$$

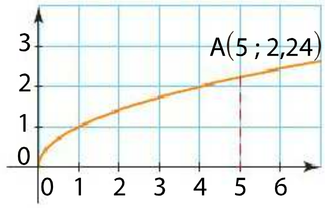
Dans un repère, la courbe représentative de B modélise le bénéfice, en centaines d'euros, d'une entreprise en fonction du nombre x d'objets vendus.

Cette entreprise a réalisé un bénéfice de 63 000 euros.

Tom conjecture, à l'aide de sa calculatrice, que l'entreprise a vendu 445 objets. Confirmer ou infirmer cette conjecture par un calcul, et donner le nombre exact d'objets vendus.



21 On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction racine carrée dans un repère et placé le point A(5 ; 2,24). Ce point appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier.



22 $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ dans un repère. Dans chaque cas, dire si le point appartient à $\mathscr{C}$. Justifier.

a) A(64 ; 8) **b)** B(− 16 ; − 4) **c)** C(2 ; 1,41)

23 **a)** Donner le tableau de variation de la fonction racine carrée sur $[4\,;7]$.

b) En déduire un encadrement de $\sqrt{x}$ sur $[4\,;7]$.

24 Compléter les pointillés en utilisant un nombre réel ou un intervalle ou un symbole parmi $<, >, \leqslant, \geqslant$.

a) Si $x \leqslant 3$, alors $\sqrt{x} \ldots \sqrt{3}$.

b) Si $x \in [5\,;+\infty[$, alors $\sqrt{x} \in \ldots$.

c) Si $0 < x \leqslant 12$, alors $\ldots < \sqrt{x} \leqslant \ldots$.

d) Si $x \in [25\,;\,100]$, alors $\ldots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \ldots$.

25 Dans chaque cas, compléter par $\leqslant$ ou $\geqslant$ en précisant la propriété de la fonction racine carrée utilisée.

a) $\dfrac{7}{9} \ldots \dfrac{5}{9}$, donc $\dfrac{\sqrt{7}}{3} \ldots \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b) $\pi \ldots 4$, donc $\sqrt{\pi} \ldots 2$.

26 Dans chaque cas, comparer les deux nombres réels sans la calculatrice.

a) $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{7}$ et 3

c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ et 1

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 41.

27 Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ chaque inéquation en s'aidant de la courbe représentative de la fonction racine carrée.

a) $\sqrt{x} \leqslant 3$ **b)** $\sqrt{x} > 1$ **c)** $\sqrt{x} < 10$

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 41.

La fonction $x \mapsto x^3$

28 Reproduire et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-dessous.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^3							

29 Dans chaque cas, calculer l'image du nombre réel par la fonction $f : x \mapsto x^3$.

a) 2,5 **b)** -3 **c)** 0 **d)** -150 **e)** $-0{,}1$

30 Dans chaque cas, calculer l'image du nombre réel par la fonction $f : x \mapsto x^3$.

a) $-3\sqrt{2}$ **b)** $4\sqrt{5}$ **c)** 2×10^3

Aide : $(ab)^3 = a^3 \times b^3$.

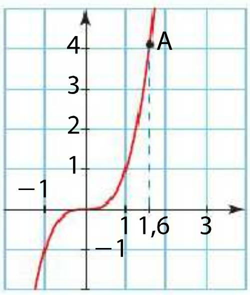
31 Dans chaque cas, calculer l'image du nombre réel par la fonction cube.

a) $\dfrac{2}{3}$ **b)** $-\dfrac{1}{2}$ **c)** $\dfrac{5}{3}$ **d)** $\dfrac{10^{-2}}{5}$

32 Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction cube sur l'intervalle donné, en précisant la fenêtre utilisée.

a) $I = [-0{,}5\,;0{,}5]$ **b)** $I = [-100\,;100]$

33 Voici la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction cube dans un repère et le point $A(1{,}6\,;4{,}096)$.



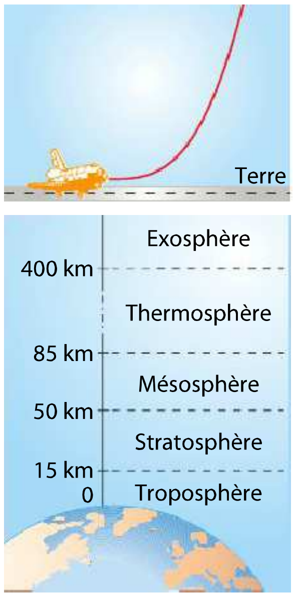
a) Ce point appartient-il à $\mathscr{C}$? Justifier.

b) Expliquer graphiquement pourquoi tout nombre réel admet un unique antécédent par la fonction cube.

34 F est la fonction définie sur $[0\,;100]$ par :

$$F(t) = 0{,}0001t^3$$

Dans un repère, la courbe représentative de F modélise la trajectoire, en km, d'une navette spatiale qui décolle de la Terre, en fonction du temps t en secondes.



a) Au bout de combien de temps, la navette spatiale sortira-t-elle de la troposphère ? Arrondir à l'unité.

b) Combien de temps mettra-t-elle à traverser la stratosphère ? Arrondir à l'unité.

35 Utiliser le tableau de variation de la fonction cube pour dire à quel intervalle appartient x^3 lorsque :

a) $x \in [-1\,;3]$ **b)** $x \in [2\,;+\infty[$ **c)** $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$

36 Compléter chaque phrase.

a) $\dfrac{3}{2} > 1$ et la fonction cube est …, on en déduit que $\dfrac{27}{8}$ … 1.

b) $-2 < -\sqrt{2}$ et la fonction cube est …, on en déduit que -8 … $-2\sqrt{2}$.

37 Recopier et compléter chaque phrase.

a) x est un nombre réel de $[-2\,;3]$. La fonction cube étant … sur …, on en déduit que … $\leqslant x^3 \leqslant$ …

b) x un nombre réel inférieur ou égal à -5. La fonction cube étant … sur …, on en déduit que $x^3 \in$ …

38 Compléter les pointillés en utilisant un réel ou un intervalle ou un symbole parmi $<, >, \leqslant, \geqslant$ et en précisant la propriété utilisée.

a) Si $x \leqslant -3$, alors x^3 … -27.

b) Si $x \in]-2\,;+\infty[$, alors $x^3 \in$ …

c) Si $-1 < x \leqslant 2$, alors $x^3 \in$ …

d) Si $x \in [-10\,;10]$, alors … $\leqslant x^3 \leqslant$ …

39 Dans chaque cas, comparer les deux nombres.

a) $(-10)^3$ et $(-10{,}5)^3$ **b)** $(\pi - 3)^3$ et $0{,}14^3$

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 43.

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque inéquation en s'aidant de la courbe représentative de la fonction cube.

a) $x^3 \leqslant 27$ **b)** $x^3 \geqslant -1$ **c)** $x^3 \leqslant -10{,}648$.

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 43.

Travaux pratiques

Pour expérimenter et modéliser

41 Un petit air de guitare

PROBLÈME On se propose de déterminer si cette corde de guitare permet d'obtenir des sons tels que le do_2, le sol_2, ou le $ré_3$.

La fréquence f (en hertz) du son d'une corde de guitare est proportionnelle à la racine carrée de la tension T (en newtons).

$$f = 10\sqrt{T}$$

Les sons émis par cette corde deviennent identifiables lorsque la tension est supérieure à 250 N.

La corde casse lorsque la tension est supérieure à 750 N.

1. a) Donner le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

b) Dans un repère correctement choisi, tracer la courbe représentative de f.

2. Aux sons ci-dessous sont associées leurs fréquences :

do_2 : 132 Hz ; sol_2 : 198 Hz ; $ré_3$: 278 Hz.

Peut-on avec cette corde obtenir de tels sons ?

Proposer une réponse graphique, puis un calcul.

42 B2i L3-4 L3-5 Force du vent

PROBLÈME On se propose de déterminer la force du vent dans diverses situations concrètes.

Pour évaluer la force du vent en météorologie, on utilise l'échelle de Beaufort qui comporte 13 degrés (de 0 à 12). La vitesse moyenne du vent (en km/h) est donnée par la relation $v = 3\sqrt{d^3}$ où d est la force du vent exprimée en degrés de Beaufort.

1. a) À l'aide d'un tableur, compléter le tableau suivant avec d variant de 0 à 12.

1 nœud = 1,852 km/h.

	A	B	C
1	Force du vent d	Vitesse v (en km/h)	Vitesse v (en noeuds)
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		

b) À l'aide de l'assistant graphique, représenter la vitesse (en km/h) en fonction de la force du vent (en degrés de Beaufort).

2. En mer, on parle de conditions sérieuses pour un vent de force 7. À quelle vitesse (en km/h) cela correspond-il ?

3. La pratique du kitesurf se fait dans de bonnes conditions lorsque la vitesse du vent est entre 12 et 25 nœuds. Donner alors par lecture graphique la force du vent.

4. En décembre 1999 en France, les vents de la tempête Lothar se déplaçaient à 120 km/h. À quelle force cela correspond-il sur l'échelle de Beaufort ?

43 B2i L3-4 L3-5 Terrains à bâtir

OBJECTIF Modéliser une situation et faire des prévisions.

Le tableau ci-dessous indique le prix de vente des terrains à bâtir dans une commune.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
2	Rang x_i de l'année	0	5	10	15	20	25	30
3	Prix y_i du m² en euros	58,8	63,9	70	74,7	80	85	87

1. a) Reproduire avec un tableur la feuille de calcul ci-dessus et représenter ces données par le nuage des points $(x_i\,;y_i)$.

b) • Effectuer un clic-droit sur l'un des points du nuage.

• Sélectionner « Insérer une courbe de tendance ».

• Cocher Linéaire et Afficher l'équation.

2. On envisage de modéliser cette évolution à l'aide de la fonction f telle que $f(x) = 10\sqrt{1{,}5x + 34}$, où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le prix du m².

a) Quelle formule, permettant de calculer les valeurs de $f(x)$, doit-on entrer en cellule B4 ? La recopier jusqu'en H4.

b) À l'aide de l'assistant graphique, tracer la courbe de f.

3. On valide un modèle si l'écart entre les prix observés et les prix calculés à l'aide de la fonction ne dépasse pas 2 €. Peut-on valider les modèles définis aux questions **1.** et **2.** ?

4. Déterminer selon chacun des modèles définis aux questions **1.** et **2.** :

a) quel sera le prix d'un terrain de 1 500 m² en 2015 ?

b) à partir de quelle année le prix du m² dépassera les 100 € pour la première fois ?

44 B2i L3-4 L3-5 Marché à l'équilibre

OBJECTIF Étudier une situation économique.

On note x la quantité de jouets en bois mise sur le marché en un mois par une entreprise artisanale, avec $x \in [10 ; 120]$.

- La fonction d'offre f est définie par :

$$f(x) = 0{,}25x + 65$$

$f(x)$ représente le prix unitaire, en euros, établi par l'entreprise lorsqu'elle propose x articles sur le marché.

- La fonction de demande g est définie par :

$$g(x) = 130 - 4\sqrt{x}$$

$g(x)$ représente le prix unitaire, en euros, en fonction de la quantité x demandée par le consommateur.

On se propose de déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire celui pour lequel les quantités offerte et demandée sont égales.

1. Conjecture

À l'aide d'un tableur :

a) reproduire et compléter le tableau suivant. Indiquer les formules entrées en cellules B2 et C2 ;

	A	B	C
1	Quantité x d'objets	Offre f(x)	Demande g(x)
2	10		
3	15		
4	20		
5	...		

b) représenter graphiquement les courbes de f et g pour $x \in [10 ; 120]$;

c) conjecturer le prix d'équilibre du marché. À quelle quantité de jouets correspond-il ? Estimer alors la recette de l'entreprise.

2. Démonstration

On cherche à démontrer la conjecture émise au **1. c)** par un calcul.

Voici le début de la démonstration d'un élève :

Le prix d'équilibre correspond à :
$f(x) = g(x)$
$0{,}25x + 65 = 130 - 4\sqrt{x}$
$0{,}25x + 4\sqrt{x} - 65 = 0 \quad (*)$
Je pose $X = \sqrt{x}$, donc $X^2 = x$.
L'équation $(*)$ devient alors :

a) À l'oral, expliquer les étapes de cette démonstration.

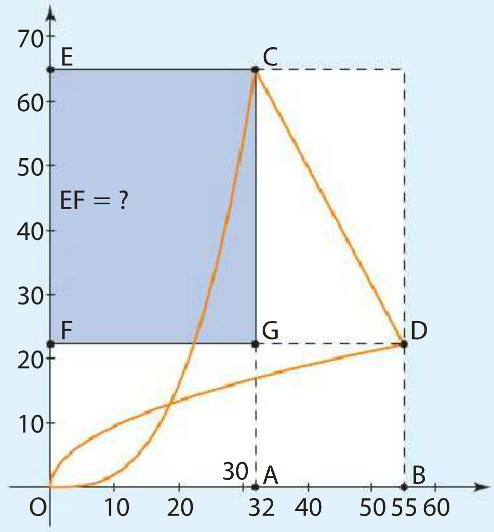
b) Terminer ces calculs et comparer les résultats aux conjectures émises en **1. c)**.

45 B2i L3-4 L3-5 Création d'affiches

OBJECTIF Dans une situation concrète, répondre à des contraintes graphiques.

Le responsable d'une association sportive souhaite réaliser des affiches de largeur 55 cm, sur lesquelles figure un logo construit en utilisant les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ des fonctions $f : x \mapsto 3\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{x^3}{500}$.

On a représenté cette affiche ci-dessous.



a) Reconnaître les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le graphique.

b) Réaliser cette figure à l'aide d'un logiciel grapheur de type GeoGebra.

c) À partir des indications du graphique, déterminer la hauteur de l'affiche.

d) Il compte insérer un texte sur la partie en bleu. De quelle hauteur EF dispose-t-il ?

e) Il souhaite diminuer la largeur de l'affiche afin de disposer d'au moins 45 cm de haut pour insérer son texte, tout en conservant le logo et la hauteur d'affiche calculée précédemment. Conjecturer, puis déterminer la nouvelle largeur x de l'affiche.

Exercices d'entraînement

Pour développer des compétences

Critiquer, argumenter

46 Bénéfices et pertes

Une entreprise propose des services à la personne.

- Ce qu'elle facture, en euros, à ses clients est modélisé par la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$F(t) = 18 + 14t$$

où t est le nombre d'heures de travail.

- Ce que lui coûte, en euros, le travail d'un salarié (charges patronales, frais de fonctionnement, …) est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$C(t) = 0{,}5\,(t+5)^2 + 5{,}5$$

où t est le nombre d'heures de travail.

Les courbes de C et F sont représentées dans le repère ci-dessous.

a) Leila prétend qu'on peut lire sur le graphique que pour 18 h de travail environ, l'entreprise ne réalise ni bénéfice, ni perte. David lui répond : « Pas seulement ». Expliquer leur raisonnement.

b) Peut-on lire sur le graphique :

- le bénéfice réalisé pour 28 h de travail ?
- le bénéfice réalisé pour 10 h de travail ?

47 Travailler en groupe **Carré et cube**

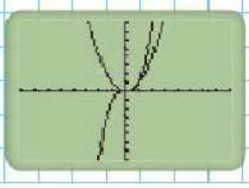
La consigne d'un exercice était :

« Comparer le carré d'un nombre réel et son cube ».

Voici les réponses données par deux élèves.

- Réponse de Max :

J'ai représenté les fonctions carré et cube à la calculatrice. Je constate que celle du cube est au-dessus de celle du carré sur $[0\,;+\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty\,;0]$.



- Réponse de Julie :

Je résous l'inéquation $x^3 < x^2$.
En simplifiant par x, j'obtiens $x^2 < x$, $x^2 - x < 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $x^3 < x^2$ pour $x \in \,]0\,;1[$
et $x^3 > x^2$ pour $x \in \,]-\infty\,;0[\, \cup \,]0\,;+\infty[$.

a) Analyser et critiquer les réponses apportées par Max et Julie. Comparer les deux méthodes.

b) Expliquer et corriger l'erreur faite par Julie.

c) Rédiger une réponse correcte. Proposer une fenêtre graphique qui permette une vérification.

Algorithmique

48 Algorithme interrompu

Voici un algorithme écrit avec AlgoBox :

```
1   VARIABLES
2     x EST_DU_TYPE NOMBRE
3     y EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DÉBUT_ALGORITHME
5     AFFICHER "saisir la valeur de x"
6     LIRE x
7     TANT_QUE (x<=20) FAIRE
8       DÉBUT_TANT_QUE
9       y PREND_LA_VALEUR sqrt(10-x)
10      AFFICHER "L'image de"
11      AFFICHER x
12      AFFICHER "est  "
13      AFFICHER y
14      x PREND_LA_VALEUR x+1
15      FIN_TANT_QUE
16  FIN_ALGORITHME
```

1. Que calcule cet algorithme ?

2. Pauline teste cet algorithme en entrant 1 pour valeur initiale de x, le message suivant s'affiche :

*** Algorithme interrompu ligne 9 : erreur de calcul***.

a) Expliquer pourquoi.

b) Modifier alors cet algorithme, afin que le message d'erreur n'apparaisse plus.

c) Utiliser cet algorithme (le modifier éventuellement) pour compléter le tableau suivant :

x	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1
$\sqrt{10-x}$				

49 **Évolution d'un chiffre d'affaires**

f est la fonction définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = 1\,000(x^3 - 1{,}5x^2 - 60x + 400)$$

Le directeur financier d'une société déclarait fin 2010 :
« *Cette fonction correspond bien à l'évolution de notre chiffre d'affaires durant les onze dernières années. De 400 000 euros, nous avons vu notre chiffre d'affaires baisser jusqu'à moins de 200 000 euros et, suite à la mise en place d'un plan de redressement en 2005, nous sommes remontés à 650 000 euros.* »

a) Utiliser la courbe représentative de la fonction f pour vérifier les affirmations précédentes.

b) Quel a été le chiffre d'affaires minimal de la société durant cette période de onze ans ?

Mener un raisonnement

50 **Surface corporelle**

La formule suivante, établie par Mostellers en 1987, donne la surface corporelle S (en m²) d'un individu en fonction de sa taille x (en cm) et de son poids y (en kg) :

$$S = \frac{\sqrt{xy}}{60}$$

1. Calculer la surface corporelle d'un individu de 90 kg, mesurant 1 m 95.
Arrondir le résultat au centième.

2. Un individu pesant 72 kg a une surface corporelle de 1,8 m².
Calculer sa taille.

3. On étudie l'évolution de la surface corporelle S selon la taille, pour les individus pesant 80 kg.

a) Montrer que :

$$S = \frac{\sqrt{5x}}{15}$$

b) Étudier le sens de variation de la fonction S sur l'intervalle $[160\,;200]$.
Dresser le tableau de variation de S.

c) En déduire un encadrement de la surface corporelle pour les individus de 80 kg mesurant entre 1,60 m et 2 m.

Info

L'utilisation de la surface corporelle est très intéressante en thérapeutique car elle permet une adaptation plus précise des posologies.
Il existe différentes formules pour calculer la surface corporelle : la formules de Boyd (la plus précise mais sa mise en œuvre est difficile), la formule de Gehan & George, la formule de Mostellers.
Pour le petit enfant, on utilise une formule qui s'affranchit de sa taille.

51 **Vitesse d'un tsunami**

La vitesse v d'un tsunami (en km/h) dépend de la hauteur d'eau h (en m) selon la relation :

$$v = 3{,}6\sqrt{gh}$$

où g est une constante égale à 9,8.

a) Déterminer la hauteur de l'eau (en m) lorsque la vague se déplace à une vitesse de 800 km/h.

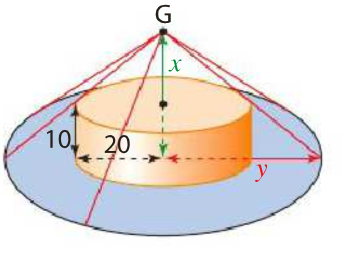
b) Déterminer la vitesse de la vague à l'approche des côtes lorsque la hauteur d'eau est d'environ 50 m.

Info

Lorsque la vitesse de la vague est très élevée (800 km/h), son amplitude est faible (environ 1 m), rendant les tsunamis difficilement détectables en eaux très profondes.

52 Travailler en groupe

Dans un aérodrome un gyrophare est placé au-dessus d'un hangar cylindrique de 10 m de hauteur et de base circulaire de 20 m de rayon.



L'ombre portée au sol est un cercle de rayon y (en m) lorsque le gyrophare est placé à une hauteur x (en m).
On s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto y$.

a) Sur quel intervalle est-elle définie ?

b) Indiquer, sans calcul, son sens de variation.

c) Démontrer que pour tout nombre réel x, $x > 10$:

$$f(x) = \frac{20x}{x - 10}$$

d) Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'écran de la calculatrice.

Communiquer à l'écrit, à l'oral

53 **Une erreur de la calculatrice ?**

a) Donner les valeurs de $1{,}000\,000\,000\,1^3$ et de $1{,}000\,000\,000\,09^3$, obtenues à l'aide de la calculatrice.
Qu'en pensez-vous ?

b) Comparer ces deux nombres.

54 **Enquête de gendarmerie**

La distance de freinage d, en m, d'une voiture sur route sèche est donnée par la relation :

$$d = \frac{v^2}{160}$$

où v est la vitesse de véhicule en km/h.

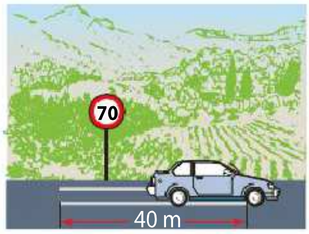
1. Calculer les distances de freinage pour les vitesses suivantes :

a) 50 km/h

b) 90 km/h

c) 130 km/h

2. Un accident vient de se produire. Les traces de pneus laissées par la voiture indiquent la distance de freinage. Les gendarmes arrivés sur place souhaitent savoir si l'automobiliste était en excès de vitesse.



a) Exprimer v en fonction de d.

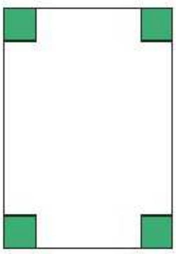
b) Apporter une conclusion à l'enquête de gendarmerie.

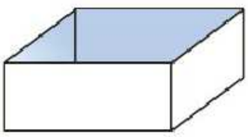
Un métier Gendarme

Le gendarme, au-delà de la verbalisation, assure la protection du territoire, des biens et des personnes. Ceci nécessite exemplarité et de grandes qualités humaines.

55 Travailler en groupe **Boîte de plus grand volume**

Avec une feuille de papier de format A4 ($21 \times 29{,}7$ cm), on peut fabriquer des boîtes sans couvercle, en pliant simplement les quatre angles.





Problème : existe-t-il un pliage donnant un volume plus grand que tous les autres ?

1. Manipulation

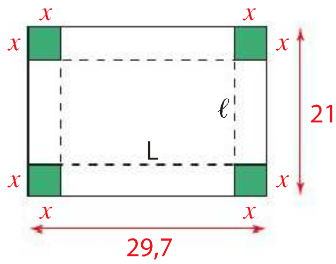
a) Avec une feuille de papier de format A4, fabriquer une boîte sans couvercle.

b) Prendre les mesures de la boîte et calculer le volume de celle-ci.

c) Confronter avec les résultats des autres élèves.

2. Expérimentation

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser la figure suivante :



x est la longueur des côtés des 4 coins

Définir un curseur x variant de 0 à 10,5.

b) Faire varier x et afficher les valeurs de L, ℓ et $V = L \times \ell \times x$.

c) Conjecturer une réponse au problème.

3. À la calculatrice

a) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.

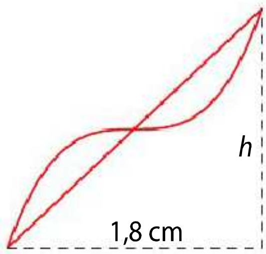
b) À l'aide de la calculatrice confronter le résultat émis à la question **2. c)**.

56 **Création d'un pendentif**

Un pendentif a la forme symétrique suivante, obtenue à l'aide de la courbe de la fonction cube et d'un segment.

Sa largeur est de 1,8 cm.

Quelle est la hauteur du segment h ?



57 **En anglais**

1. a) Sketch the graphs of the following functions :

$$x \mapsto x^3 \text{ and } x \mapsto 2{,}44x - 1{,}44$$

for x such that $-5 \leqslant x \leqslant 5$ on your calculator.

b) Conjecture the number of solutions of the equation:

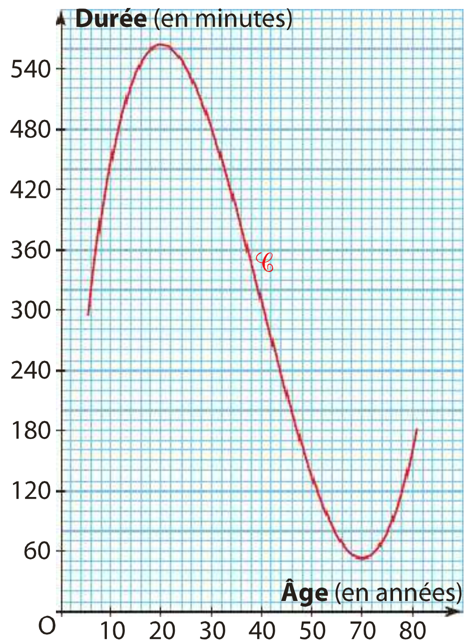
$$x^3 = 2{,}44x - 1{,}44$$

2. Using the following relation, given by the software Xcas, find the coordinates of the intersection points between the two curves.

1	factoriser(x^3-2.44x+1.44)
	(x-1)·(x-0.8)·(x+1.8)

58 **Durée de connexion**

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous donne la durée moyenne hebdomadaire de connexion (en minutes), en fonction de l'âge (en années), des abonnés à un distributeur d'accès à Internet.



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes.

1. Donner les solutions de l'équation $f(x) = 450$. Interpréter concrètement le résultat obtenu.

2. Dans quelle tranche d'âge se trouvent les internautes :

a) qui se connectent moins de 3 heures par semaine ?

b) qui se connectent au moins 6 heures ?

3. Donner les durées maximale, puis minimale, de connexion (en heures et minutes) ainsi que les âges des internautes correspondants.

59 Un problème d'optimisation

Le coût moyen journalier, en euros, d'un équipement industriel, en fonction de la durée x d'utilisation (en jours), est donné par :

$$C(x) = 1\,500 + 2x + \frac{2\,000\,000}{x}$$

avec $x \in [200 ; 4\,000]$.

a) À l'écran de la calculatrice, faire apparaître clairement la courbe représentant $\mathscr{C}$, en précisant la fenêtre utilisée.

b) En déduire la durée d'utilisation de l'équipement qui correspond à un coût moyen journalier minimal et donner ce coût.

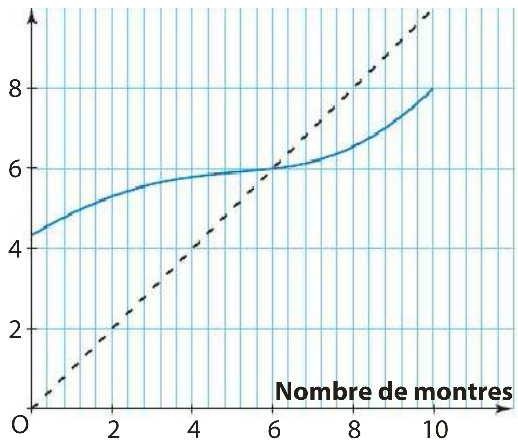
60 objectif Bac **Fabrication de montres**

Le graphique ci-dessous rend compte de l'activité journalière d'une usine de fabrication de montres de luxe : la courbe en trait plein représente le coût de production (en milliers d'euros) et la droite en pointillés représente la recette (en milliers d'euros).

1. Par lecture graphique, déterminer :

a) le nombre de montres à vendre par jour pour obtenir une recette de 6 000 € ainsi que le coût correspondant ;

b) le nombre de montres à vendre par jour pour que l'usine fasse un bénéfice.



2. Pour x montres, avec $x \in [0 ; 10]$, le coût de production est $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}135x^2 + 0{,}7x + 4{,}5$ et la recette est $R(x) = x$.

a) Montrer que le bénéfice réalisé est :

$$B(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}135x^2 + 0{,}3x - 4{,}5.$$

b) Afficher clairement la courbe de la fonction B à l'écran de la calculatrice, puis dresser le tableau de variation de B sur $[0 ; 10]$.

c) En déduire le nombre de montres qu'il faut vendre pour que le bénéfice soit maximal et la valeur de ce bénéfice.

S'initier à la logique

61 Quantificateurs universel, existentiel

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

a) Pour tout réel x, $x^3 = x$.

b) Il existe au moins un nombre réel x tel que $x^3 = x$.

c) Il existe un nombre réel x tel que $x^3 = x$.

62 Quantificateurs universel, existentiel (bis)

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

a) Quel que soit le nombre réel x, on a $\sqrt{x^2} = x$.

b) Il existe un nombre réel x, tel que $\sqrt{x^2} = x$.

c) Quels que soient les nombres réels positifs a et b,

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

d) Pour tout nombre réel $x \in [4 ; +\infty[$, $\sqrt{x} \geqslant 2$.

63 Implications

x désigne un nombre réel. Dans chaque cas, dire si la proposition est vraie ou fausse. Justifier les réponses.

a) Si $x \geqslant -2$, alors $\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}$

b) Si $x \geqslant 12$, alors $\sqrt{x} \geqslant 2\sqrt{3}$.

c) Si $x \leqslant -5$, alors $x^3 \geqslant -125$.

d) Si $x \geqslant -10$, alors $x^3 \leqslant -1\,000$.

Se préparer au contrôle

68 **Comparer des réels sans calculatrice**

Dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans la calculatrice.

a) $-3\sqrt{1{,}002}+5$ et $-3\sqrt{1{,}01}+5$

b) $(0{,}01)^3$ et $(-0{,}007)^3$

Conseils
- Quels nombres réels faut-il comparer au départ ?
- Quelle propriété des fonctions racine carrée et cube utilise-t-on ensuite ?

69 **Utiliser la calculatrice graphique**

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction
$f : x \mapsto x^3 - 14x^2 + 16x + 96$
en utilisant la fenêtre ci-contre.

```
WINDOW
 Xmin=-8
 Xmax=8
 Xscl=1
 Ymin=-300
 Ymax=300
 Yscl=50
 Xres=1
```

b) Conjecturer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

c) À l'aide du logiciel Xcas, on a obtenu :

```
1 factoriser(x^3-14x^2+16x+96)
                    (x-12)·(x-4)·(x+2)
```

Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) Proposer une fenêtre graphique adaptée permettant de lire convenablement ces résultats.

Conseil
Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ revient à étudier l'intersection d'une courbe et d'une droite ; lesquelles ?

70 **Résoudre graphiquement des inéquations**

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction racine carrée sur $[0\ ;\ 10]$ (*unités :* 1 cm pour 1 en abscisses et 2 cm pour 1 en ordonnées).

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $3\sqrt{x} \leqslant 7{,}5$

b) $-2\sqrt{x}+3 \leqslant 0$

Conseils
1. Revoir le cours paragraphe 2 page 40.
2. Revoir l'exercice résolu 2 page 41.

71 **Quelle forme adopter ?**

Un flacon doit contenir 100 mL de parfum.

a) Sa forme est cubique.
Calculer une valeur approchée au mm près du côté de ce flacon.

b) À présent sa forme est sphérique.
Calculer une valeur approchée au mm près du rayon r de ce flacon.

Conseils
a) On rappelle : 1 mL = 1 cm^3. Quelle équation faut-il résoudre ?
b) On rappelle que le volume occupé par une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

72 **Un problème d'optimisation**

Un éleveur souhaite réaliser un enclos rectangulaire de 500 m^2 pour ses chevaux, en utilisant un minimum de clôture pour le délimiter. On note x la largeur de l'enclos et $\ell(x)$ la longueur de la clôture (en m) pour $x > 0$.

a) Montrer que :
$$\ell(x) = 2x + \frac{1\,000}{x}$$

b) Proposer une fenêtre graphique permettant d'afficher clairement la courbe de ℓ à l'écran de la calculatrice.

c) En utilisant le mode G-solv (Casio) ou CALC (TI) de la calculatrice, donner une valeur approchée au centimètre près des dimensions de l'enclos pour que la longueur de clôture soit minimale.

Conseil
a) Quelle égalité relie aire, largeur et longueur d'un rectangle ?

73 **Comparer deux fonctions**

1. a) Afficher à l'écran de la calculatrice les courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ des fonctions :
$$f : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^3.$$

b) Par lecture graphique, comparer un nombre réel et son cube.

2. Démontrer ce résultat en étudiant le signe de $x^3 - x$.

Conseil
Peut-on factoriser l'expression $x^3 - x$?

Vérifier les réponses p. 272

AUTO ÉVALUATION POUR SE TESTER

Travailler en autonomie

QCM

64 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

1 Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ est symétrique par rapport :

a) à l'axe des ordonnées **b)** à l'origine du repère **c)** à l'axe des abscisses

2 Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction racine carrée est :

a) décroissante **b)** croissante **c)** croissante puis décroissante

3 Sur $\mathbb{R}$, la fonction cube est :

a) positive **b)** négative **c)** négative puis positive

4 L'affirmation exacte est :

a) $(1-\pi)^3 \leqslant (3-\pi)^3$ **b)** $(2+\sqrt{2})^3 \geqslant (3+\sqrt{5})^3$ **c)** $(1-\sqrt{5})^3 \geqslant (2-\sqrt{5})^3$

65 Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Laquelle ? Justifier.

1 Dans un repère, le point A d'abscisse 8 appartient à la courbe de la fonction racine carrée.
L'ordonnée de A est :

a) 2,828 **b)** $2\sqrt{2}$ **c)** 64

2 Dans un repère, le point B d'ordonnée 50 appartient à la courbe de la fonction racine carrée.
L'abscisse de B est :

a) 2 500 **b)** $\sqrt{50}$ **c)** 7,071

3 Si $0 \leqslant x \leqslant 100$, alors :

a) $\sqrt{x} \in]-\infty ; 20]$ **b)** $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 10$ **c)** $\sqrt{x} \geqslant 10$

4 Si $x \in [-3 ; +\infty[$, alors :

a) $x^3 \in]-\infty ; -27]$ **b)** $x^3 \geqslant 27$ **c)** $x^3 \geqslant -27$

Exercices interactifs

Vrai-Faux

66 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse.

f est la fonction racine carrée.

a) Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de *f* est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Tous les nombres réels ont exactement une image par *f*.

c) Si $x \in [2 ; 9]$, alors $\sqrt{2} \leqslant f(x) \leqslant 3$.

d) Pour tout nombre réel x positif ou nul, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

e) $f(\pi - 1) < f(\pi - 2)$

f) Les solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 5$ sont les nombres réels de $]-\infty ; 25[$.

67 Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier.

f est la fonction cube.

a) Il existe un nombre réel négatif ayant une image positive par *f*.

b) Deux nombres réels opposés ont des images opposées par *f*.

c) Si $-2 < x < 3$, alors $-8 < f(x) < 27$.

d) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant -27$ sont les nombres réels de l'intervalle $]-\infty ; -3]$.

e) Pour tout nombre réel x, $x^2 \leqslant x^3$.

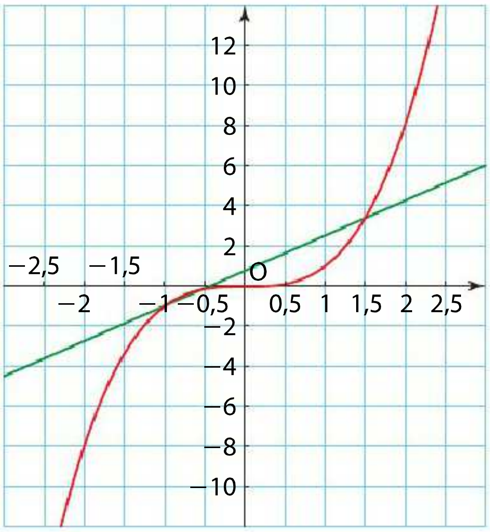
f) Pour tout nombre réel x, si $x^3 \geqslant 1$ alors $x \geqslant 1$.

Exercices interactifs

77 Intersection entre deux courbes

Voici les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ représentatives des fonctions :

$$f : x \mapsto x^3 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto 1{,}75x + 0{,}75$$



1. Conjecturer par lecture graphique le nombre de solutions de l'équation :

$$x^3 = 1{,}75x + 0{,}75$$

2. a) Utiliser un logiciel de calcul formel pour factoriser l'expression :

$$x^3 - 1{,}75x - 0{,}75$$

b) Démontrer la conjecture émise en **1**.

Histoire des mathématiques

Le mathématicien Cardan a proposé au XVIe siècle une méthode générale permettant de résoudre toutes les équations du type $x^3 = px + q$ avec p et q réels.

78 Le lancer du poids

Au cours d'un meeting d'athlétisme, un poids lancé par un athlète atteint une hauteur maximale avant de retomber au sol. L'abscisse (en mètres) de la position du poids pendant la phase de chute est donnée en fonction de la hauteur h (en mètres) du poids, par la relation :

$$x(h) = \sqrt{76 - 20h} + 6$$

a) Justifier que $0 \leqslant h \leqslant 3{,}8$.

b) Justifier que le lancer a été mesuré à plus de 6 m.

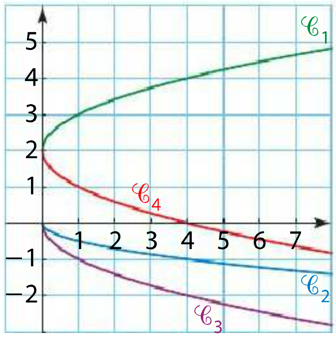
c) Quelle est l'abscisse de la position du poids lorsqu'il atteint sa hauteur maximale ?

d) Calculer la longueur de ce lancer.

79 Sans calculatrice

Associer à chacune des courbes ci-dessous la fonction qui lui correspond parmi les suivantes :

- $f(x) = \sqrt{x} + 2$
- $g(x) = 2 - \sqrt{x}$
- $h(x) = -\sqrt{x}$
- $k(x) = -0{,}5\sqrt{x}$



80 Circuit de chauffage

Dans le cadre de l'installation d'un circuit de chauffage, on utilise des tubes de cuivre afin d'acheminer de l'eau entre une chaudière et les radiateurs.

Le diamètre D de ces tubes (en mm), dépend de la puissance P (en watts) à transporter ; il est donné par la relation :

$$D = \sqrt{\frac{P}{30}}$$

1. a) Dresser un tableau donnant les valeurs de D pour P variant de 2 000 à 20 000, avec un pas de 2 000.

b) Représenter graphiquement la fonction dans un repère (*unités :* 1 cm pour 2 000 watts en abscisses et 1 cm pour 2 mm en ordonnées en commençant à 8.)

2. Un chauffagiste dispose de tubes de diamètres : 10 mm, 16 mm et 22 mm.

a) Dans chaque cas, lire graphiquement la puissance qui peut être transportée.

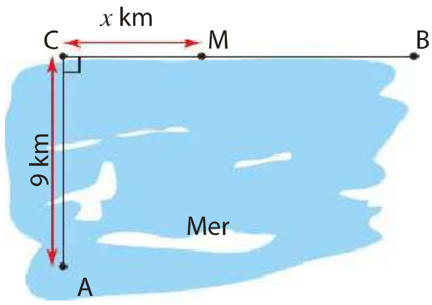
b) Retrouver par le calcul les résultats du **a)**.

81 Le gardien d'un phare

Le gardien d'un phare situé en A et entouré d'eau, souhaite rejoindre la maison côtière située en B.

M est le point de [CB] tel que $CM = x$.

$AC = 9$ et $BC = 15$.



Le gardien parcourt la distance AM en canot à la vitesse moyenne de 4 km/h, puis la distance MB à pied à 5 km/h. On note $f(x)$ le temps en heures mis par le gardien pour rejoindre sa maison.

Exercices d'approfondissement

Pour aller plus loin

74 Travailler en groupe Avec un guide (1)

Le nombre d'abonnés à une revue littéraire est une fonction a telle que :

$$a(p) = -0{,}4p^2 - 5p + 13\,000$$

où p est le prix de l'abonnement annuel (en euros), avec $p \in [0\ ;\ 150]$. La recette est le montant total des abonnements annuels perçus par l'éditeur.

1. Calculer la recette perçue lorsque le prix de l'abonnement est fixé à 50 €.

2. Calculer la recette perçue lorsque 6 640 personnes ont pris un abonnement annuel.

3. On note R la fonction donnant la recette selon le prix de l'abonnement.

a) Justifier que, pour tout $p \in [0\ ;\ 150]$:

$$R(p) = -0{,}4p^3 - 5p^2 + 13\,000p$$

b) Tracer la courbe de R à l'écran de la calculatrice en utilisant une fenêtre adaptée.

c) Par lecture graphique, conjecturer le prix auquel l'abonnement annuel doit être fixé pour que la recette soit maximale.

4. a) Vérifier que :

$$R(p) - 850\,000 = (-0{,}4p - 85)(p - 100)^2.$$

b) Étudier le signe de $R(p) - 850\,000$.

c) En déduire la recette maximale et le prix de l'abonnement qui permet de l'obtenir.

d) Combien la revue compte-t-elle alors d'abonnés ?

Guide de résolution

1. Déterminer le nombre d'abonnés et le prix payé par chaque abonné.
2. Déterminer le prix de l'abonnement. Résoudre une équation du second degré.
3. b) Une fenêtre graphique standard ne permet pas un affichage exploitable : penser à tabuler les valeurs de la fonction.
4. c) Justifier que $R(p) \leqslant 850\,000$ et calculer $R(100)$.

75 Avec un guide (2)

Afin de remonter à la surface de l'eau un appareil de prospection des fonds sous-marins qui s'est endommagé lors de son utilisation, des plongeurs utilisent des ballons gonflés avec de l'air comprimé. On note x le rayon (en mètres) d'un tel ballon sphérique.

1. Exprimer en fonction de x et de π le volume d'air (en m^3) occupé par ce ballon.

2. La masse volumique de l'eau est de 1 046 kg/m^3. Déterminer alors en fonction de x et de π la masse d'eau déplacée par une immersion totale de ce ballon. On note $m(x)$ cette masse.

3. a) Quelle masse d'eau un ballon de 80 cm de diamètre peut-il déplacer ?

b) L'appareil que les plongeurs souhaitent remonter à la surface pèse 400 kg. Calculer une valeur approchée au centième près du rayon du ballon.

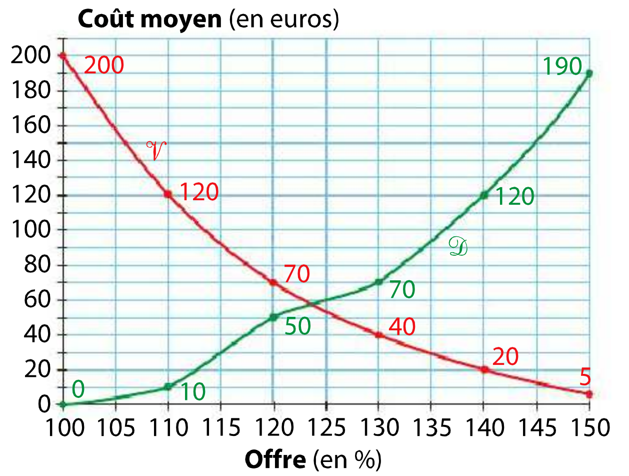
Guide de résolution

2. 1 m^3 d'eau a une masse de 1 046 kg ; procéder alors par proportionnalité.
3. b) Résoudre une équation.

76 Surbooking

Les compagnies aériennes ont souvent recours au « surbooking » (louer plus de places que n'en contient l'appareil). Elles sont alors amenées à gérer deux types de risques induisant des coûts : celui d'avoir des sièges vides, et celui de débarquer des passagers.

On admet que les courbes $\mathscr{V}$ et $\mathscr{D}$ ci-dessous représentent pour une compagnie, durant une période donnée, le coût (en euros) des sièges vides ($\mathscr{V}$) et le coût des passagers débarqués ($\mathscr{D}$) en fonction de l'offre x appliquée (x en %, avec $100 \leqslant x \leqslant 150$). On note v et d les fonctions associées.



1. a) Lire graphiquement $v(115)$ et $d(115)$ et interpréter concrètement ces résultats.

b) Donner une explication concrète aux sens de variation de v et d, constatés graphiquement.

2. On pose $C(x) = v(x) + d(x)$ et on admet que :

$$C(x) = \frac{x^3}{400} - 0{,}775x^2 + 75{,}5x - 2\,100.$$

Déterminer à la calculatrice l'offre que la compagnie doit appliquer pour que le coût total soit minimal.

1. a) Exprimer AM en fonction de x. En déduire le temps mis pour parcourir la distance AM.

b) Exprimer en fonction de x le temps mis pour parcourir la distance BM.

c) En déduire $f(x)$ pour $x \in [0 ; 15]$, puis afficher la courbe de f à l'écran de la calculatrice.

2. Le gardien choisit l'itinéraire lui permettant de se rendre le plus vite possible du phare à sa maison. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

a) À combien de km du point C va-t-il accoster ?

b) Quel est son temps de parcours (en heures/minutes) ?

82 B2i L3-4 L3-5 Modélisation

Le tableau suivant donne les investissements réalisés par un opérateur téléphonique entre 2005 et 2009, ainsi que le nombre d'abonnés.

Année	2005	2006	2007	2008	2009
Investissement x_i (en milliards d'euros)	1	1,1	1,2	1,3	1,4
Nombre d'abonnés y_i (en milliers)	90	100	105	110	112

1. Reproduire avec un tableur le tableau ci-dessus et représenter ces données par le nuage de points $(x_i ; y_i)$.

2. On envisage de modéliser cette évolution à l'aide de la fonction f telle que :

$$f(x) = 165 - \frac{71{,}5}{x}, \text{ pour } x \in [1 ; 1{,}6]$$

À l'aide de l'assistant graphique, tracer la courbe de f.

3. En 2010, l'opérateur a augmenté ses investissements de 0,2 milliard d'euros et le nombre d'abonnés observés a été de 118 000.

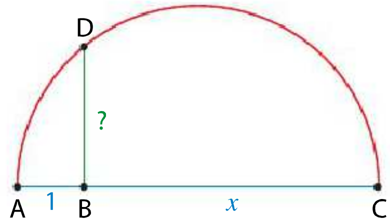
Calculer l'estimation du nombre d'abonnés en 2010 avec le modèle et le comparer à la valeur observée.

83 Problème ouvert

A, B et C sont trois points alignés tels que :

$$AB = 1 \quad \text{et} \quad BC = x$$

Le segment $[BD]$ est perpendiculaire à $[AB]$ et on a tracé le demi-cercle de diamètre $[AC]$.



Déterminer BD en fonction de x.

84 Défi

Retrouver la propriété (en relation avec ce chapitre), qui a été codée en utilisant la méthode S + 7 de l'OULIPO.

« Tout nominalisme possible ou numismatique adosse un raclage casanier. »

SUJETS D'EXPOSÉS

SUJET 1

Le *Yield Management* est un système de gestion des capacités utilisé dans les entreprises de service afin d'optimiser les recettes.

→ Rechercher sur Internet des informations sur ces techniques ainsi que les secteurs d'activités dans lesquels elles sont utilisées et présenter le résultat de vos recherches à la classe.

Les compagnies qui organisent des croisières pratiquent le *Yield Management*.

SUJET 2

On a évoqué ci-dessus le nom de l'OULIPO et la contrainte S + 7.

→ Rechercher sur Internet des informations sur ce groupe : les activités et les acteurs de ce mouvement.

→ Présenter à la classe des exemples d'activités littéraires réalisées par des acteurs de ce groupe.

Raymond Queneau.