

# Problème de diagonales

## Enoncé initial :

On voudrait connaître, sans avoir à le tracer, le nombre de diagonales d'un polygone convexe... Par exemple, combien de diagonales dans un octogone, dans un dodécagone ?

## Organisation du travail :

Matériel : polygones réguliers convexes pour la recherche.

## Séance 1 :

Organisation	Rôle du maître / consignes	Activités de l'élève
<b>Présentation collective</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Présentation de la situation de recherche.</li> <li>↪ S'assurer de la bonne compréhension de la situation.</li> <li>↪ Interroger sur la démarche, soit que mettre en œuvre pour résoudre cette situation.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Echanger un point de vue.</li> <li>↪ Imaginer une démarche de recherche.</li> </ul>
<p><i>Lors de l'échange, faire percevoir qu'avant de s'engager dans la résolution, il conviendrait de percevoir s'il existe un lien entre un polygone convexe et son nombre de diagonales, s'il existe une approche autre que le tracé pour déterminer ce nombre de diagonales.</i></p> <p><i>Lors de cette présentation, laisser un temps en binôme pour essayer de définir une démarche sur ce point.</i></p> <p><i>Amener à considérer alors une recherche sur des polygones réguliers convexes, du triangle à l'hexagone.</i></p>		
<b>Recherche de groupe</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Définir la tâche de recherche du triangle à l'hexagone.</li> <li>↪ Essayer de laisser faire les élèves, observer les démarches, ne pas induire.</li> <li>↪ Interroger sur les démarches engagées et sur leur finalité.</li> <li>↪ Encourager ceux qui bloquent.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Développer une procédure.</li> <li>↪ Organiser une démarche.</li> <li>↪ Emettre des hypothèses.</li> <li>↪ Présenter les données issues de la recherche.</li> <li>↪ S'interroger, formuler ce qui pose question.</li> </ul>
<b>Mise en commun</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Recenser les différentes démarches, les observations faites et les questions que l'on se pose.</li> <li>↪ Aider à verbaliser les procédures, interroger sur les démarches et données.</li> <li>↪ Faire apparaître les éventuelles difficultés, ainsi qu'une certaine organisation dans la recherche.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Présenter une démarche, en percevoir le sens mais aussi les limites.</li> <li>↪ Interroger les autres.</li> <li>↪ Analyser des données.</li> </ul>
<p><i>Outre la confrontation des résultats, qui hormis des erreurs de dénombrement des diagonales, erreurs pour lesquelles on cherchera à définir des procédures les évitant, s'attacher à une critique non des démarches (à priori, on peut supposer que l'usage des tracés prédominera, quoiqu'il puisse exister d'autres procédures) mais de la clarté des recherches, de leur structuration.</i></p> <p><i>De même, s'interroger sur la présentation des résultats, cette présentation permettant-elle de définir une relation entre nombre de côtés et nombre de diagonales.</i></p> <p><i>Se poser la question de savoir si les solutions permettent de définir une procédure permettant d'anticiper le nombre de diagonales. Engager une recherche sur le nombre de diagonales d'un heptagone et vérifier par tracé.</i></p>		

<b>Recherche de groupe</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Définir la tâche de recherche et la faire reformuler.</li> <li>↪ Observer les démarches, les faire oraliser.</li> <li>↪ Encourager sans induire, en s'appuyant par exemple sur la mise en forme des solutions antérieures.</li> <li>↪ En cas de groupe en grande difficulté, engager la recherche sur l'évolution du nombre de diagonales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Structurer les données.</li> <li>↪ Essayer de définir une relation entre les données.</li> <li>↪ Anticiper un résultat.</li> <li>↪ Le vérifier, et sur cette base, analyser ce qu'on pensait être au regard de cette vérification.</li> </ul>
<b>Mise en commun</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Recenser les différentes propositions, les faire expliciter.</li> <li>↪ Amener les enfants à justifier leurs remarques.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↪ Définir une méthode permettant de connaître le nombre de diagonales.</li> <li>↪ Expliquer une démarche.</li> <li>↪ Argumenter sur une démarche mathématique.</li> </ul>
<p><i>En fin de cette séance, on vise à obtenir une procédure permettant de définir le nombre de diagonales. Par l'observation des suites (voir annexe), on peut amener à considérer que la forme la plus simple réside en la suite, pour <math>n</math> côtés (<math>n &gt; 3</math>) : <math>2 + 3 + \dots + (n-2)</math>.</i></p> <p><i>La forme de raisonnement du type problème des poignées des mains est ici un peu plus complexe à percevoir du fait qu'un sommet n'est pas lié aux deux sommets adjacents par une diagonale. Expliquer qu'on peut définir le nombre de diagonales par la suite <math>1 + 2 + \dots + 2(n-3)</math> me paraît donc plus ardu.</i></p>		

Séance 2 :

Organisation	Rôle du maître / consignes	Activités de l'élève
<b>Mise en route</b>	<p>L'enseignant reprend l'énoncé initial soit définir le nombre de diagonales d'un octogone, d'un dodécagone... sans représentation graphique.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Amener les élèves à formuler ce qu'on a perçu antérieurement</li> <li>↳ S'assurer de la bonne compréhension de la situation.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Formuler ce qu'on a compris.</li> <li>↳ Débattre sur les perceptions erronées et en expliquer les erreurs.</li> </ul>
<b>Recherche de groupe</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Observer les méthodes, repérer les interprétations erronées.</li> <li>↳ Demander aux enfants, au sein des groupes, d'oraliser les pratiques.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Mettre en œuvre une procédure construite antérieurement.</li> <li>↳ Intégrer une procédure... et en dégager les faiblesses.</li> </ul>

On peut discerner deux mises en œuvre (en dehors de perceptions erronées ou de difficulté à mettre en pratique une démarche), l'une s'attachant directement aux deux cas de figures évoquées, l'autre passant par les figures intermédiaires :

Soit la mise en œuvre de la formulation  $2 + 3 + \dots + (n-2)$ .

Soit via le tableau :

Nombre de côtés (ou de sommets)	Nombre de diagonales	
3	0	+ 2
4	2	+ 3
5	5	+ 4
6	9	+ 5
7	14	+ 6
8	20	+ 7
9	27	+ 8
10	35	+ 9
11	44	+ 10
12	54	

L'une marquant une perception plus aboutie des éléments construits auparavant.

La prise en compte de ces écritures intermédiaires, par leur écriture développée, peut permettre de percevoir le terme de la suite, en mettant en parallèle ce terme et le nombre de côtés. Ces exemples peuvent aider à concevoir ce que représente alors le terme  $n$  et, peut-être selon les enfants, de s'approprier la formulation plus abstraite : pour  $n$  côtés, le nombre de diagonales est égale à  $2 + 3 + \dots + (n-2)$ .

<b>Mise en commun</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Lister les démarches.</li> <li>↳ Amener à débattre des pratiques mises en œuvre.</li> <li>↳ Faire percevoir le sens de l'écriture <math>n</math> et celle de la somme <math>2 + 3 + \dots + (n-2)</math>.</li> <li>↳ Amener l'élève à percevoir les faiblesses de l'écriture de cette somme... via par exemple pour <math>n = 50</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>↳ Percevoir le sens des erreurs.</li> <li>↳ Faire le lien entre les procédures, en dégager les faiblesses.</li> <li>↳ Saisir le sens d'une démarche.</li> <li>↳ Expliquer des erreurs, des pratiques.</li> </ul>
-----------------------	--	---

*Cette mise en commun, outre la compréhension d'une procédure, vise à approcher l'abstraction de la notion de nombre via son écriture sous la forme  $n$ , ainsi que de l'écriture  $2 + 3 + \dots + (n-2)$ , donc à donner du sens à cette écriture, sans omettre le sens des points de suspension.*

*Elle peut aussi amener à percevoir les faiblesses de la procédure via des exemples du type "combien de diagonales pour 50 côtés ?"... et donc ouvrir une autre perspective, qu'on traitera ou non, soit comment définir le nombre de diagonales sans faire ces additions successives.*

*La première hypothèse de recherche serait, sur la base de nombres de côtés donnés, de définir le nombre de diagonales et d'essayer de percevoir une fonction mathématique liant antécédent et image... mais par expérience, cette procédure de recherche me paraît bien complexe et peu adaptée au cycle 3... hormis peut-être de rares élèves, mais à ce jour, je n'en ai pas rencontré.*

*La seconde hypothèse de recherche est de définir un cadre permettant de percevoir un éventuel lien entre antécédent et image. Par expérience, je m'orienterai plutôt sur cette voie.*

<b>Présentation collective</b>	↪ Définir la situation de recherche et en donner le sens.	↪ S'interroger sur une problématique mathématique.
	↪ Construire un cadre de recherche, en assurer la compréhension.	↪ Percevoir le sens de la situation de recherche.
	↪ Faire expliquer ce cadre de recherche.	↪ Comprendre les modalités de recherche.

*Pour cette recherche, s'appuyer sur le tableau suivant :*

Nombre de sommets	Nombre de diagonales partant d'un sommet	Nombre hypothétique de diagonales	Nombre réel de diagonales
4	1	4	2
5	2	10	5
$n$			

*La colonne grisée étant facultative, et permettant ainsi une certaine différenciation, puisqu'elle permet une simplification de la recherche.*

*Pour concevoir le sens des colonnes, on pourra compléter collectivement le tableau pour le cas des quadrilatères convexes, en laissant les élèves justifier des propositions.*

*Insister sur le fait qu'il ne s'agit pas de compléter ad vitam aeternam ce tableau, mais de s'appuyer sur ce dernier sur la base de quelques données pour essayer de définir une relation entre nombre de sommets (ou côtés) et nombre de diagonales.*

*Finaliser en essayant de définir, par exemple, le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant 200 côtés.*

<b>Recherche de groupe</b>	↪ Observer les démarches, questionner sur les relations perçues (ou non).	↪ Construire une procédure de recherche.
	↪ Encourager sans induire, en amenant à fractionner le questionnement (par exemple, le lien entre nombre de sommet et nombre de diagonales partant d'un sommet).	↪ Essayer de définir une relation entre les données.
	↪ En cas de groupe en grande difficulté, construire le tableau avec la colonne grisée.	↪ Emettre des hypothèses, les valider sur des cas connus.
		↪ Définir une relation mathématique entre des nombres.
		↪ En élaborer une formulation générale.

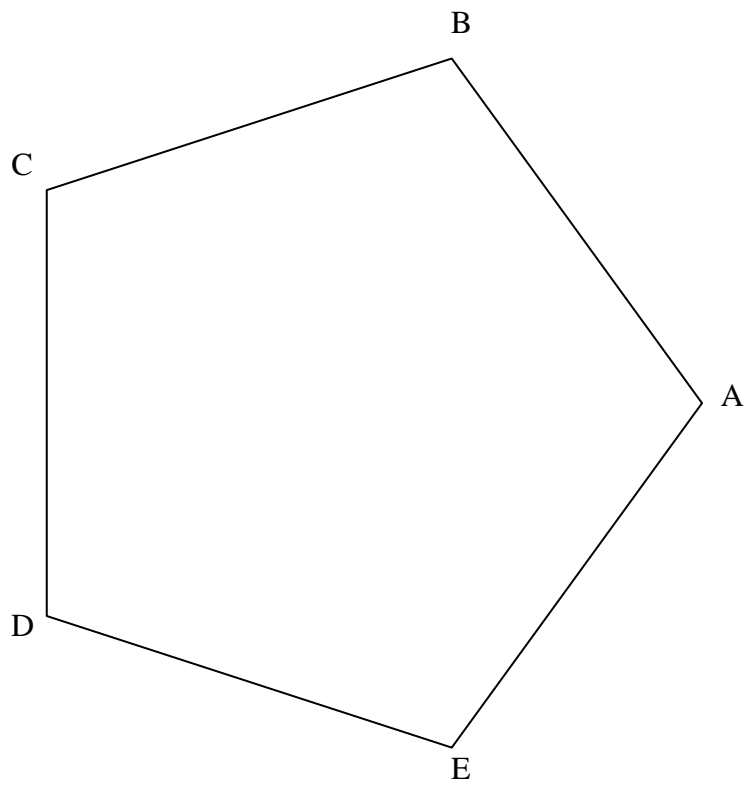
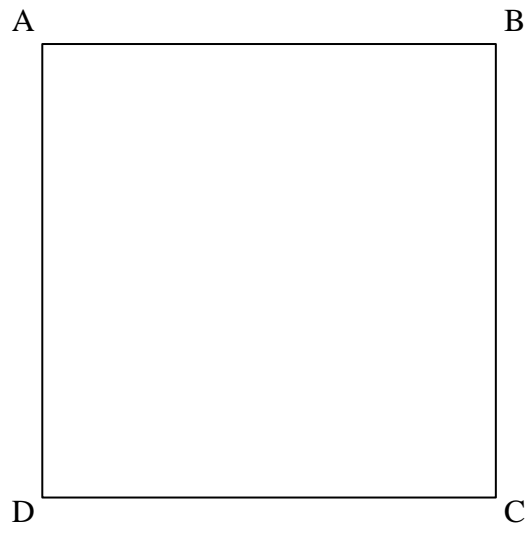
<b>Mise en commun</b>	↪ Recenser les différentes propositions, les faire expliciter.	↪ Expliquer, justifier une démarche et la proposition issue de cette dernière.
	↪ Faire percevoir les liens entre des données et en dégager une écriture générale.	↪ Reformuler une proposition.
	↪ Amener les enfants à une écriture générale d'une fonction mathématique.	↪ Débattre sur des propositions. Les valider ou non.
		↪ Percevoir les erreurs.
		↪ Formuler une relation mathématique.

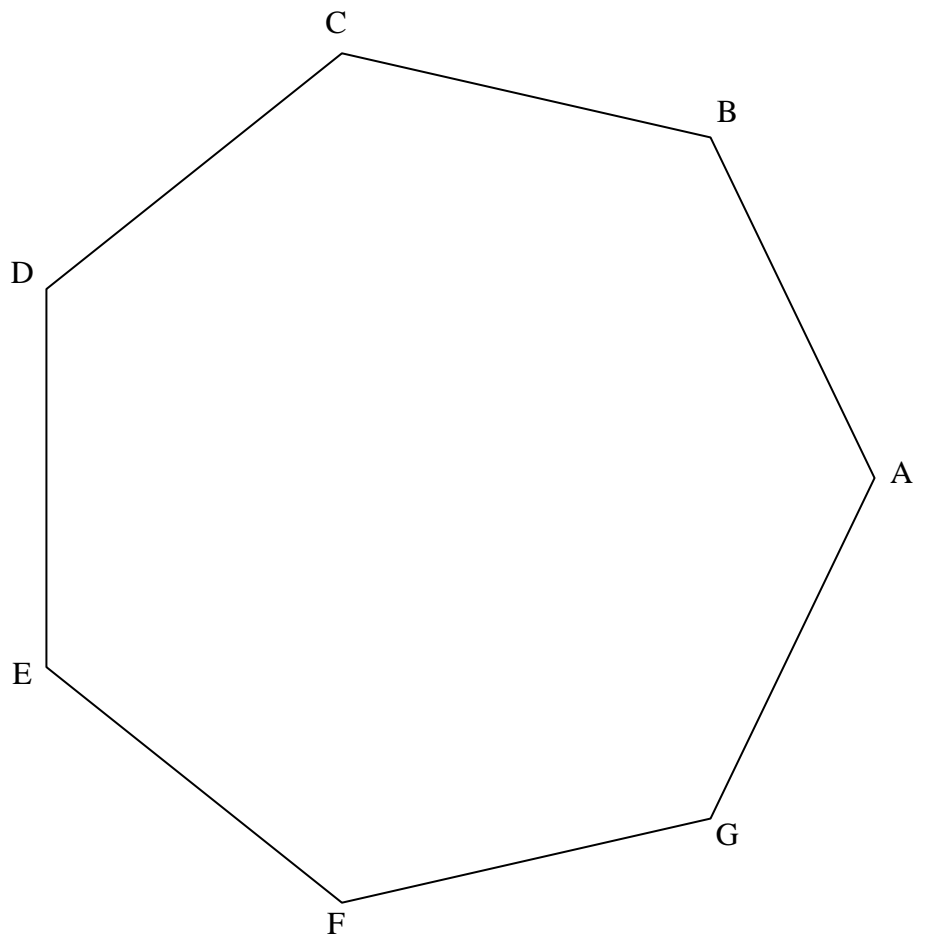
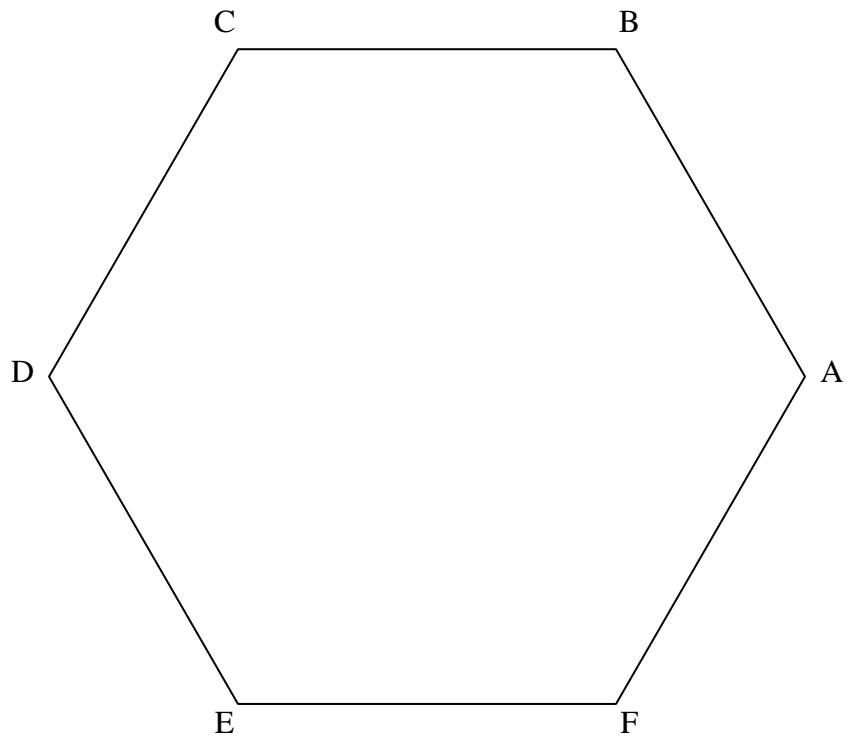
*Lors de cette mise en commun, on essaiera de se dégager du nombre "concret" pour aboutir à une écriture de la fonction selon  $n$ , en s'appuyant sur les liens entre les données.*

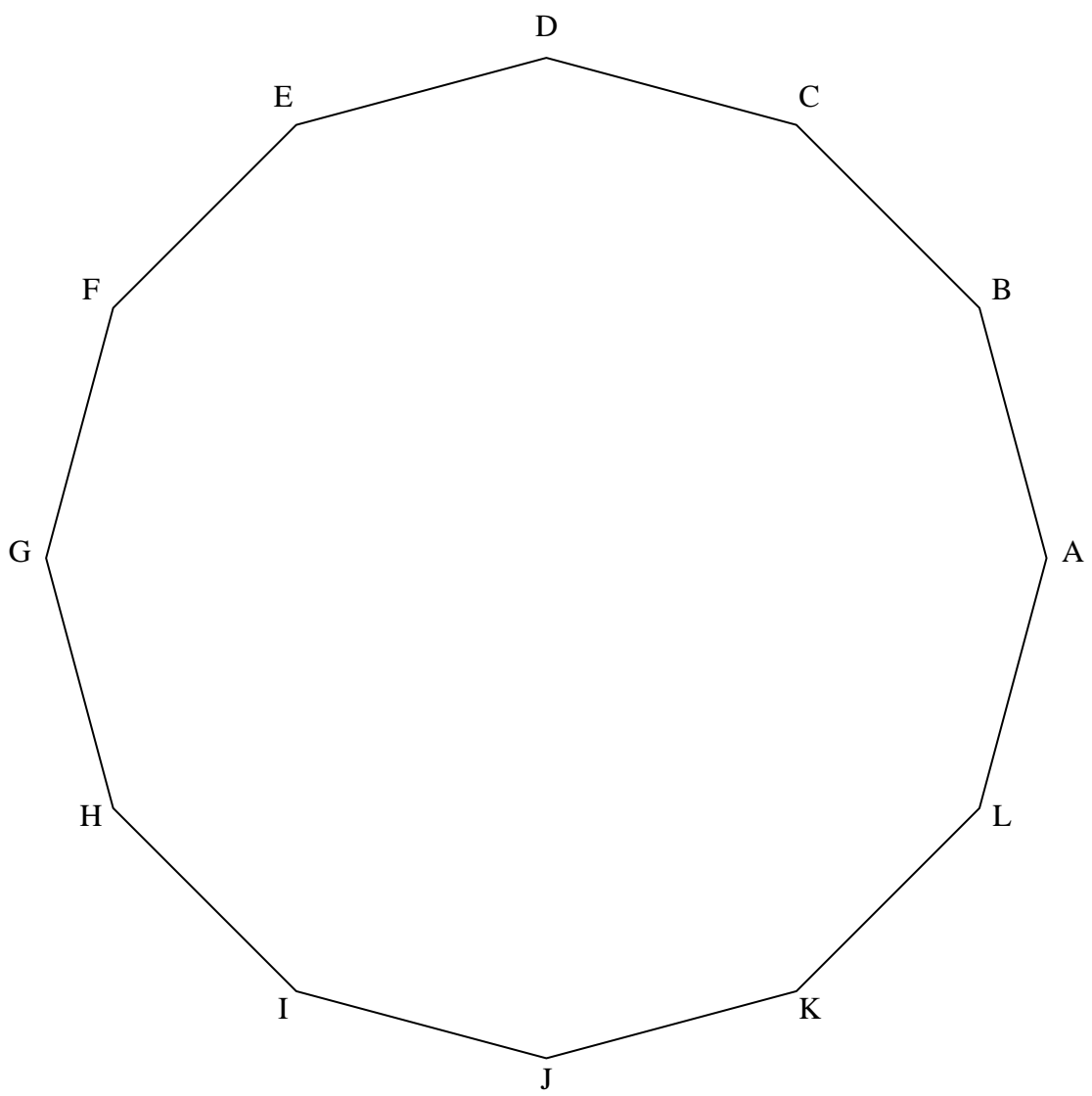
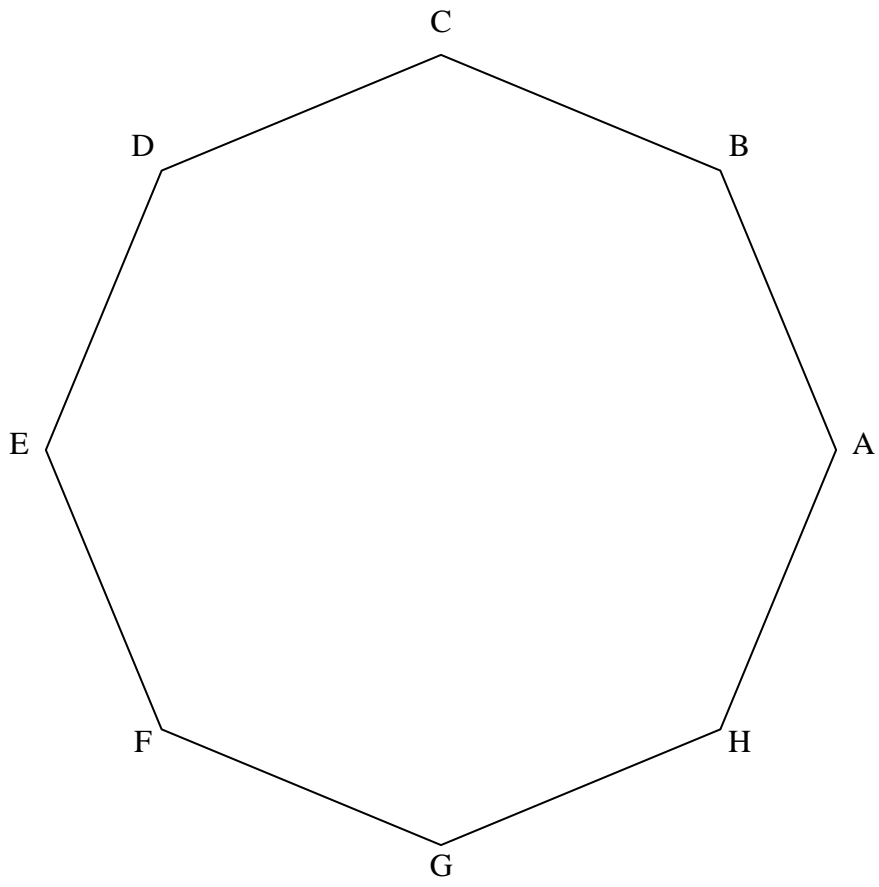
*Ainsi, faire percevoir le lien entre le nombre de sommets et le nombre de diagonales partant d'un sommet... etc. On essaiera ainsi d'approcher l'écriture  $n(n-3)/2$  du moins si les propositions et les perceptions des élèves l'autorisent.*

*Mettre en pratique collectivement cette relation si elle apparait, afin d'en assurer une relative compréhension.*

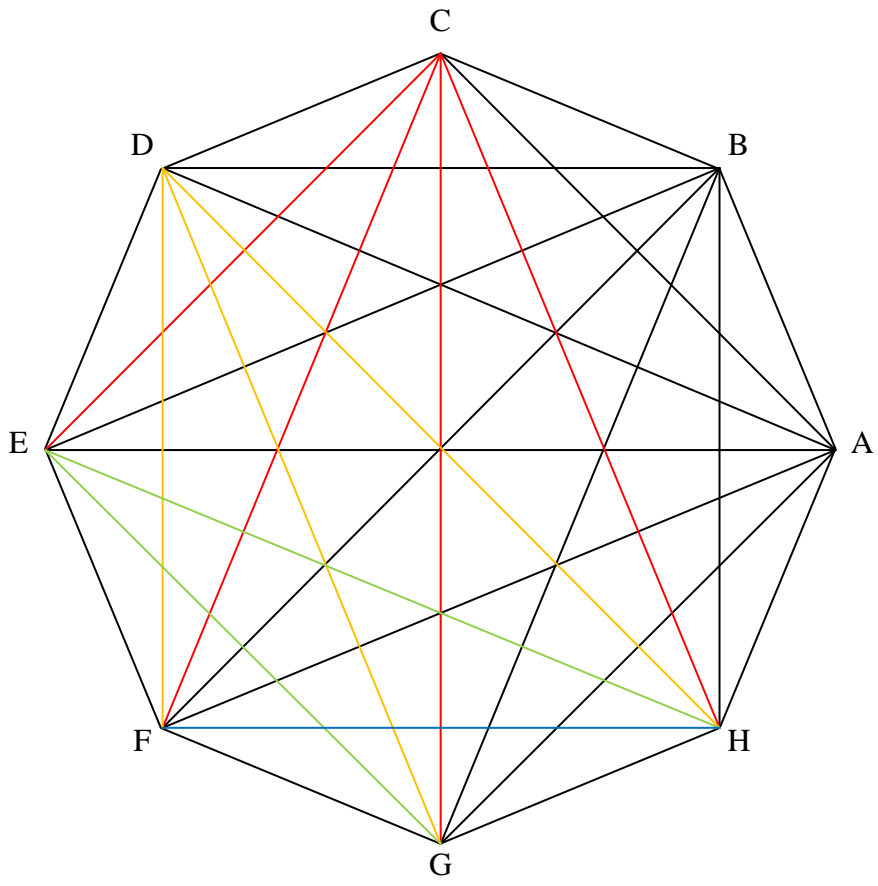
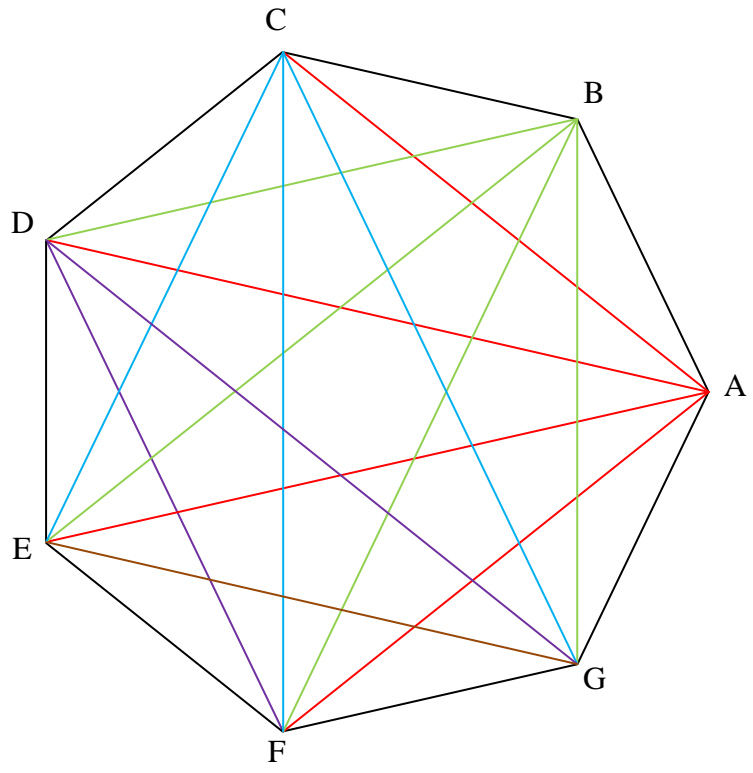
**Documents annexes :**











## Procédures :

Outre celle du tracé, on peut supposer :

Exemple de l'hexagone :

- Sommets A, B, C, D, E et F.

AC BD CE DF ~~EA~~ ~~FB~~

AD BE CF ~~DA~~ ~~EB~~ ~~FC~~

AE BF ~~CA~~ ~~DB~~ ~~EC~~ ~~FD~~

Il y a 9 diagonales.



- Usage d'une formule :

De chaque point partent 3 diagonales. On a donc  $6 \times 3$  soit 18 diagonales.

*Nota : Cette erreur permettra néanmoins de dégager une formule simplifiant la recherche et sera donc à conserver si jamais elle apparaît.*

*A ce jour, je n'ai vu nulle autre procédure...*

## Présentation éventuelle des données :

Nombre de côtés (ou de sommets)	Nombre de diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14

D'où :

Soit  $n$  le nombre de côtés, et  $a$  le nombre de diagonales

- Pour  $n = 3$ ,  $a = 0$
- Pour  $n = 4$ ,  $a = 2$
- Pour  $n = 5$ ,  $a = 2 + 3$
- Pour  $n = 6$ ,  $a = 2 + 3 + 4$
- Pour  $n = 7$ ,  $a = 2 + 3 + 4 + 5$

On pourra observer que, pour  $n > 3$ ,  $a = 2 + \dots + (n-2)$ . Formuler ainsi, je ne pense pas que tout enfant saisisse la relation. On fera plutôt apparaître le lien entre le nombre de côtés et le dernier terme de cette suite, via un questionnement du type :

Pour 13 côtés, on va calculer  $2 + 3 + 4 \dots$  jusqu'à quel nombre ?

Pour 14 côtés, on va calculer  $2 + 3 + 4 \dots$  jusqu'à quel nombre ?

Pour 15 côtés, on va calculer  $2 + 3 + 4 \dots$  jusqu'à quel nombre ?... etc.