Exercice 1

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	Vrai : cours.
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	Faux : bof...
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	Vrai : cours.
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy+x-iy)=x$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2i}$	Vrai :on a $\sin\theta=\frac{z-\bar{z}}{2i}=y$.
		$\frac{z-\bar{z}}{2}$	Faux : $\frac{z-\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}(x+iy-x+iy)=iy$.
Q3	Si z est un imaginaire pur, alors $\|z\|^2$ est égal à :	y^2	Vrai : $\|z\|^2=\|iy\|^2=\|i\|^2\|y\|^2=y^2$.
		$-y^2$	Faux : $\|i\|^2=1\neq i^2=-1$.
		$-z^2$	Vrai : comme z est imaginaire pur, on a $\|z\|^2=\|iy\|^2=y^2$ et $-z^2=-(iy)^2=y^2$.
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	Vrai : d'un côté on a $\frac{BA}{AC}=\frac{\|b-c\|}{\|c-a\|}=\|i\sqrt{3}\|=\sqrt{3}\Rightarrow BA=AC\sqrt{3}$; par ailleurs le triangle ABC est rectangle en A d'où $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow 4AC^2=BC^2$.
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	Faux : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\frac{c-a}{b-a}=\arg\frac{1}{i\sqrt{3}}$ $=\arg\frac{-i}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{2}$
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	Vrai : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow(CA)\perp(AB)$.

Exercice 2

a. **Vrai :** On a : $|Z|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right|.\left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.1=1$.

b. **Faux** : On a : $Z=-\frac{\sqrt{2}(1-i)}{1+1}e^{\frac{i\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

c. **Faux** : Le réel $Z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i3\pi}{4}}e^{\frac{i\pi}{3}}=e^{\frac{i13\pi}{12}}$ or $\frac{13\pi}{12}\neq-\frac{\pi}{12}(2\pi)$.

d. **Vrai :** On a : $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{OM}$ apour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OM'}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, ils sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

Calculons $z'\bar{z}=(x'+iy')(x-iy)=(x'x+y'y)+i(xy'-yx')$. Donc $xx'+yy'=0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\bar{z})=0$.

2. O, M et M' sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)=0\Leftrightarrow xy'-yx'=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z'\bar{z})=0$
.

Applications

3. Prenons $z'=z^2-1=x^2-y^2-1+2xy$, alors $xx'+yy'=x\left(x^2-y^2-1\right)+y(2xy)=x\left(x^2+y^2-1\right)$; le produit scalaire est donc nul si $x=0$ (axe des ordonnées) ou $x^2-y^2-1=0$ (cercle trigonométrique).

4. a. On a $\overline{\left(z^2-1\right)}=\left(\bar{z}^2-1\right)=-\bar{z}^2\left(-1+\frac{1}{\bar{z}^2}\right)=-\bar{z}^2\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}$ donc la condition du 2. se traduit par

$$\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)}\right]=\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(-\bar{z}^2\right)\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\right]=\mathrm{Im}\left(-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right).$$

b. Comme $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$ est réel, la partie imaginaire est celle de $-\bar{z}^2=-(x-iy)^2=-x^2+y^2+2ixy$. L'ensemble cherché est la réunion des axes des abscisses et des ordonnées.

Exercice 4

Partie A

1. Ω a pour affixe 1/2 et Γ a pour rayon 1/2 ; on calcule $\Omega A_0=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ donc A_0 est sur Γ. 2. a. $b'=a_0b=(-1+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}i-1=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$.

b. Avec l'argument : on calcule

$$\left(\overrightarrow{B'O},\overrightarrow{B'B}\right)=\arg\frac{b-b'}{0-b'}=\arg\frac{-1+2i+3/2-i/2}{3/2-i/2}=\arg\frac{1+3i}{3-i}=\arg\frac{(1+3i)(3+i)}{10}=\arg i=\frac{\pi}{2}.$$

On pouvait aussi faire Pythagore.

Partie B

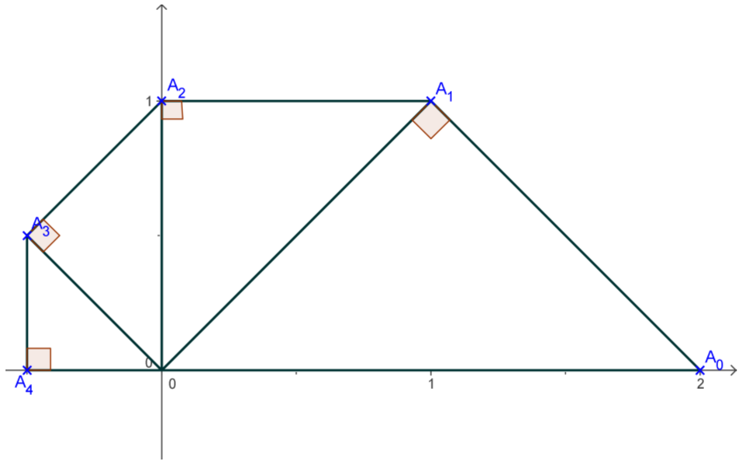
1. $\arg(\frac{a-1}{a})=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{IA}\right)$ puisque le vecteur $\overrightarrow{IA}$ a pour affixe $a-1$ et $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe a.

2. $(\overrightarrow{M'O}\,;\overrightarrow{M'M}) = \arg(\dfrac{z-z'}{0-z'}) + 2k\pi = \arg(\dfrac{z-az}{-az}) + 2k\pi = \arg(\dfrac{1-a}{-a}) + 2k\pi = \arg(\dfrac{a-1}{a}) + 2k\pi$.

3. *OMM'* est rectangle en *M'* si $(\overrightarrow{M'O}\,;\overrightarrow{M'M})$, soit lorsque $\arg(\dfrac{a-1}{a}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IA}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$, c'est-à-dire lorsque le triangle *OAI* est rectangle en *A*. *A* doit donc être sur le cercle de diamètre [*OI*]. On enlève les points *O* et *I* sinon l'écriture $\arg(\dfrac{a-1}{a}) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IA}\right)$ n'a pas de sens.

Exercice5

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{2} z_0 = \dfrac{1+i}{2} \times 2 = 1 + i$; z₂ = $z_2 = \dfrac{1+i}{2} z_1 = i$; $z_3 = \dfrac{1+i}{2} z_2 = \dfrac{-1+i}{2}$; $z_4 = \dfrac{1+i}{2} z_3 = -\dfrac{1}{2}$ donc z_4 est bien un nombre réel.



2. Pour tout entier n, $u_n = |z_n|$ donc $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| |z_n| = \dfrac{\sqrt{1+1}}{2} |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} |z_n| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_n$.

Ainsi, (u_n) est bien une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc $u_n = u_0 q^n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. A_n appartient au disque de centre *O* et de rayon 0,1 si

$$|z_n| \le 0,12 \Leftrightarrow u_n \le 0,1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \le 0,05 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le \ln 0,05 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 0,05}{\ln 1/\sqrt{2}} \approx 8,6 \Rightarrow n_0 = 9.$$

A partir du rang 9, tous les points A_n appartiennent au disque de centre *O* et de rayon 0,1.

4. a. $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{1+i}{2} z_n - z_n}{\dfrac{1+i}{2} z_n} = \dfrac{\dfrac{1+i-2}{2}}{\dfrac{1+i}{2}} = \dfrac{-1+i}{1+i} = \dfrac{-1+i}{i(-i+1)} = \dfrac{1}{-i} = i$.

On en déduit que $\left|\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = |i| = 1$, or $\left|\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right| = \dfrac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$ donc $\dfrac{A_{n+1}A_n}{A_{n+1}O}$ =1 $\Leftrightarrow A_{n+1}A_n = A_{n+1}O$ donc OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.

$\arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$ or $\arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z}\right) = \left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \dfrac{\pi}{2}(2\pi)$: OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. Conclusion OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en A_{n+1}.

b. Dans le triangle OA_nA_{n+1} rectangle et isocèle en A_{n+1}, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$2\,A_{n+1}A_n^{\,2}=OA_n^{\,2}\Leftrightarrow A_{n+1}A_n=\dfrac{OA_n}{\sqrt{2}}=\dfrac{u_n}{\sqrt{2}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$. Ainsi, $A_0A_1=\sqrt{2}$, $A_1A_2=1$, $A_2A_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(l_n) est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$l_n=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right)\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=0$ car si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ donc $l_n=\lim\limits_{n\to+\infty}l_n=\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}=2\sqrt{2}-2$.

Exercice 6

A. 1. a. $z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

A. 2. Quadrilatère *OABC* : il s'agit d'un losange.

A. 3. Δ est la médiatrice de $[OA]$: $|z|=|z-2|\Leftrightarrow OM=AM$.

B. 1. a. $z(z-2)=-4\Leftrightarrow z^2-2z+4=0\Leftrightarrow(z-1)^2=-3\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=1+i\sqrt{3}=z_B\\ z_2=1-i\sqrt{3}=z_C\end{cases}$.

B. 1. b. On a donc *B'* = *B* et *C'* = *C*.

B. 1. c. *G* a pour affixe $\dfrac{1}{3}(0+z_A+z_B)=\dfrac{2+1+i\sqrt{3}}{3}=1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, donc *G'* a pour affixe

$$\frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2}=\frac{-12}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{-12\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{9+3}=3+i\sqrt{3}.$$

B. 2. a. Question de cours

On utilise $|z|^2=z\bar{z}$ ainsi que les propriétés de $\bar{z}$.

* $|z_1\times z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2=z_1\bar{z}_1\times z_2\bar{z}_2=|z_1|^2\times|z_2|^2$;

* Comme $z\times\dfrac{1}{z}=1$, on a : $\left|z\times\dfrac{1}{z}\right|=1\Leftrightarrow|z|\times\left|\dfrac{1}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$.

B. 2. b. $|z'-2|=\left|\dfrac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right|=\dfrac{|-2z|}{|z-2|}=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

B. 2. c. On a $|z|=|z-2|$ et $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z-2|}$ donc $|z'-2|=\dfrac{2|z|}{|z|}=2$ donc *M'* appartient au cercle de centre *A*, de rayon 2.

Exercice 7

1. $a^5=e^{5.i\frac{2\pi}{5}}=e^{i2\pi}=1$.

2. Les points I, A, B, C, D, sont les images successives les uns des autres par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{5}$: I va sur A, A sur B, etc. On a donc égalité des distances (une rotation est une isométrie).

3. On développe et ça marche tout seul.

4. Comme $a^5 = 1$, a est une solution de l'équation $z^5=1$, soit de $(z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)=0$, mais comme a ne vaut pas 1, a est solution de $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ et est donc tel que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$.

5. $a^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3=e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $\bar{a}^2=\left(e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)^2=e^{-i\frac{4\pi}{5}}=e^{i2\pi-i\frac{4\pi}{5}}=e^{i\frac{6\pi}{5}}$. Même chose pour $a^4=\bar{a}$.

6. Utilisons $a^3=\bar{a}^2$ et que $a^4=\bar{a}$ dans $1+a+a^2+a^3+a^4=0 \Leftrightarrow 1+a+a^2+\bar{a}^2+\bar{a}=0$,
or $(a+\bar{a})^2=a^2+2a\bar{a}+\bar{a}^2=a^2+2+\bar{a}^2$, on retrouve bien la même relation.

7. Les solutions sont $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

8. $(a+\bar{a})=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=2\cos\frac{2\pi}{5}$, donc en rempalçant dans $(a+\bar{a})^2+(a+\bar{a})-1=0$, on a $(2\cos\frac{2\pi}{5})^2+(2\cos\frac{2\pi}{5})-1=0 \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$, $\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc une des deux solutions précédentes. Comme il est forcément positif ($\frac{2\pi}{5}=72°<90°$), il vaut $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice8

1. Question de cours

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : arg(zz') = arg(z)+ arg(z') à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

– Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z)=(\vec{u},\vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a. On utilise arg(zz') = arg(z)+ arg(z') avec $z'=\frac{1}{z}$, ce qui donne $\arg z+\arg\frac{1}{z}=\arg 1=0 \Rightarrow \arg\frac{1}{z}=-\arg z$; on réutilise la propriété 1 du produit avec $z'=\frac{1}{z'}$ et on a le résultat.

b. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\vec{u},\overrightarrow{AC})-(\vec{u},\overrightarrow{AB})=\arg(c-a)-\arg(b-a)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ en utilisant la propriété 2.

2. a. $z'=\frac{1}{\bar{z}}$ donc $\arg(z')=-\arg(\bar{z})=-(-\arg z)=\arg z$. Si M est sur une demi-droite d'origine O, on a $(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\arg z=\arg z'=(\vec{u},\overrightarrow{OM'})$ donc M' est sur la même demi-droite.

b. $z=\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$ donc les points M invariants est le cercle trigonométrique.

c. Le calcule est un peu pénible… $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{\frac{1}{\bar z}-1}{\frac{1}{\bar z}-i}=\frac{1-\bar z}{1-i\bar z}=\frac{\bar z-1}{i\bar z-1}=\frac{1}{i}\left(\frac{\bar z-1}{\bar z+i}\right)=-i\overline{\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. La dernière égalité est due à $\frac{1}{i}=-i$ et aux propriétés du conjugué.

On a donc $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)=\arg(-i)-\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=-\frac{\pi}{2}-\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$.

3. a. $\arg\frac{z-1}{z-i}=\left(\overrightarrow{VM},\overrightarrow{UM}\right)\Leftrightarrow\frac{z-1}{z-i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{VM},\overrightarrow{UM}\right)=0+k\pi$, soit U, V et M alignés.

b. En utilisant la relation précédente on a $\left(\overrightarrow{VM'},\overrightarrow{UM'}\right)=-\frac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{VM},\overrightarrow{UM}\right)$; donc si M est sur UV, $\left(\overrightarrow{VM'},\overrightarrow{UM'}\right)=-\frac{\pi}{2}-k\pi$ et M' est sur le cercle de diamètre $[UV]$ privé des points U et V.

Exercice9

1. $z'_E=\frac{1}{2}\left(-i+\frac{1}{-i}\right)=0$.

2. $z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow 2z^2=z^2+1\Leftrightarrow z^2=1\Leftrightarrow z=\pm1$.

3. a. $\frac{z'+1}{z'-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}=\frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z}=\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. $\frac{M'B}{M'A}=\frac{|1-z'|}{|-1-z'|}=\left|\frac{z'-1}{z'+1}\right|=\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2=\left(\frac{MB}{MA}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)=\arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)=2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$.

4. M est un point de Δ : $MA=MB\Rightarrow\frac{M'B}{M'A}=1^2=1\Leftrightarrow M'B=M'A$; M' est un point de Δ.

5. a. M appartient à Γ : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)=\pm2\frac{\pi}{2}=\pm\pi$ donc M' appartient à (AB).

b. Si M' a pour affixe Z, où est M ? $Z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow z^2-2Zz+1=0$ qui a toujours une ou deux solutions. Tous les points ont des antécédents par f, qu'ils soient sur $[AB]$ ou non.