Documents interdits - Calculatrice interdite

Exercice 1 : Interface plasma - vide

Un plasma homogène fait de protons et d'électrons de densité n_0 emplit tout le demi-espace gauche ($x \leq 0$). Les électrons ont une température égale à T_e.
Du fait de l'agitation thermique, les électrons se déplacent dans toutes les directions et ont tendance à déborder du plasma dans le demi-espace de droite $x > 0$. On suppose que les protons restent fixes (leur température est nulle).
Ainsi, on admet qu'une couche d'électrons d'épaisseur d et de *densité constante* n_0 se forme dans le demi-espace $x > 0$.

1) Déterminer le potentiel électrostatique $V(x)$ en tout point d'abscisse x telle que $0 \leq x \leq d$. On prendra le potentiel nul dans le plasma et on s'interrogera sur la valeur du champ électrique en $x = 0$.

2) À quelle distance d l'énergie potentielle électrostatique d'un électron est égale à son énergie cinétique moyenne ? Comment s'appelle cette distance ?

3) Que représente physiquement cette distance ?

Exercice 2 : Orbite en champ linéaire

On étudie, dans un repère cartésien (O, x, y, z), l'interaction entre un proton de masse m et de charge $+e$ et un champ magnétique stationnaire inhomogène $\vec{B}(x)$ tel que :

$$\vec{B}(x) = B_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \vec{e}_z.$$

On supposera que le mouvement du proton n'a lieu que dans le plan (xOy) et donc que sa vitesse v_z est nulle.

1) On pose $Z(t) = v_x(t) + iv_y(t)$ où v_x et v_y sont les composantes du vecteur vitesse de la particule.
Établir l'équation différentielle vérifiée par Z en fonction de $x(t)$, L et d'une quantité ω_c que l'on définira.

2) Résoudre cette équation dans le cas homogène, c'est-à-dire pour L tendant vers l'infini. En déduire les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.
Les conditions initiales du problème sont :
— la vitesse de la particule a pour composantes : $v_x(t = 0) = 0$, $v_y(t = 0) = V_0 > 0$.
— la particule se trouve au point de coordonnées $(-V_0/\omega_c, 0, 0)$ à l'origine des temps

3) Faire un schéma de la trajectoire de la particule et indiquer son sens de parcours.
Que représente la quantité V_0/ω_c ?

4) Le mouvement du proton est assimilable à une spire de courant d'intensité i et de rayon R. On rappelle qu'une telle spire crée en son centre un champ magnétique $\vec{b}$ dont la norme est donnée par

$$b = \frac{\mu_0\, i}{2R}$$

Calculer b en fonction de B_0, V_0, m et des constantes fondamentales.
Représenter le vecteur $\vec{b}$ sur le schéma précédent de la trajectoire.
Application numérique : évaluer l'ordre de grandeur du rapport b/B_0 (pas besoin de calculatrice, c'est la puissance de 10 qui compte, à $\pm$ une unité près).
On rappelle que $\mu_0/(4\pi) \simeq 10^{-7}$ H.m^{-1}, $e \simeq 10^{-19}$ C, $m \simeq 10^{-27}$ kg et on prendra $B_0 = 1$ T et $V_0 = 1000$ km/s.
Conclure.

On considère maintenant le cas général du champ linéaire avec L fini.
On note $\epsilon = V_0/(L\omega_c)$, que l'on suppose petit devant 1.
On écrit la solution générale du problème sous la forme du développement suivant :

$$Z(t) = Z_0(t) + Z_1(t) + Z_2(t) + \ldots,$$

où chaque terme $Z_n(t)$ est proportionnel à $V_0\,\epsilon^n$.
En intégrant la partie réelle de $Z(t)$, on peut aussi écrire un développement similaire pour l'abscisse x :

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \ldots$$

$Z_0(t)$ représente donc la solution en situation homogène, satisfaisant les conditions initiales précédentes. Le reste du développement, nul à l'instant initial, correspond à la perturbation induite par l'inhomogénéité du champ magnétique en fonction des puissances du petit paramètre ϵ.

5) En raisonnant en ordre de grandeur, vérifier qui si Z_n est proportionnel à $V_0\,\epsilon^n$ alors x_n/L est proportionnel à ϵ^{n+1}.
En déduire qu'en ne retenant que les termes d'ordre 1 en ϵ dans l'équation du mouvement, la fonction Z_1 satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}t} + i\omega_c\,Z_1 = -\frac{V_0^2}{L}\cos(\omega_c t)\;\mathrm{e}^{-i\omega_c t}.$$

6) On cherche une solution de l'équation ci-dessus sous la forme $Z_1(t) = A(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_c t}$ où A est une fonction éventuellement complexe du temps.
Déterminer cette fonction A puis déduire les composantes *complètes* $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse de la particule à l'ordre 1 au plus en ϵ (il est inutile d'en déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$).

7) Calculer les valeurs moyennes $< v_x >$ et $< v_y >$ de la vitesse sur une période cyclotron.

8) Comparer le résultat à la vitesse de dérive de gradient que subit le centre-guide dont on rappelle l'expression :

$$\vec{v}_D = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3}\,\vec{B}\wedge\vec{\nabla}B.$$