Géométrie plane

<u>Langage géométrique</u> : <u>notations et vocabulaire</u>.

[ ] = <u>segment</u> ➔ [AB] = segment d'extrémités A et B.

AB = longueur du segment AB (ou parfois la <u>distance de A à B</u>).

( ) = <u>droite</u> ➔ (AB) = droite passant par les points A et B.

[ ) = <u>demi-droite</u> ➔ [AB) = demi-droite d'origine A passant par B.

// = <u>parallèle</u> ➔ (AB) // (CD) = la droite (AB) est parallèle à la droite (CD).

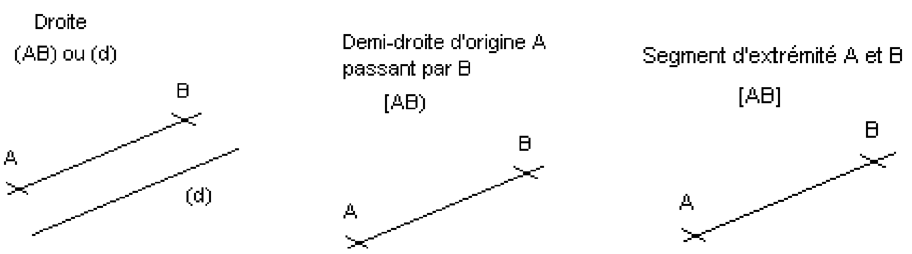
⊥ = <u>perpendiculaire</u> ➔ (AB) ⊥ (CD) = la droite (AB) est perpendiculaire à la droite(CD).

= ➔ <u>même longueur</u>.

On écrit : AB = 4cm et pas [AB] = 4cm. ---- On écrit : (AB) ⊥ (CD) et pas [AB] ⊥ [CD].

Le crochet = marque d'extrémité ; parenthèse = marque d'infini ; Ø =longueur du segment.

I. Droite, demi-droite, segment.



La <u>mesure de la longueur du segment [AB]</u> s'appelle la **distance** de A à B. Elle est notée AB.
Le milieu d'un segment est le point de ce segment qui est à égale distance de ses extrémités.

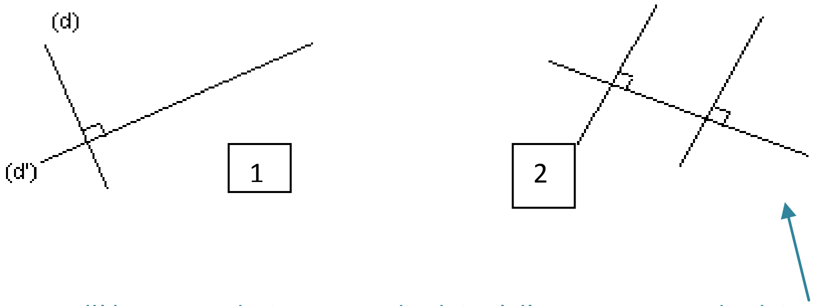
➢ **<u>Inégalités triangulaires</u>.**

- Si un point M appartient au segment [AB], alors **AM + MB = AB**.
- Si AM + MB = AB, alors le point **M appartient au segment [AB]**.
- Si un point M n'appartient pas au segment [AB], alors **AM + MB > AB**.
- Si AM + MB > AB, alors le point **M n'appartient pas au segment [AB]**.

II. Droites particulières.

- **Droites perpendiculaires.**

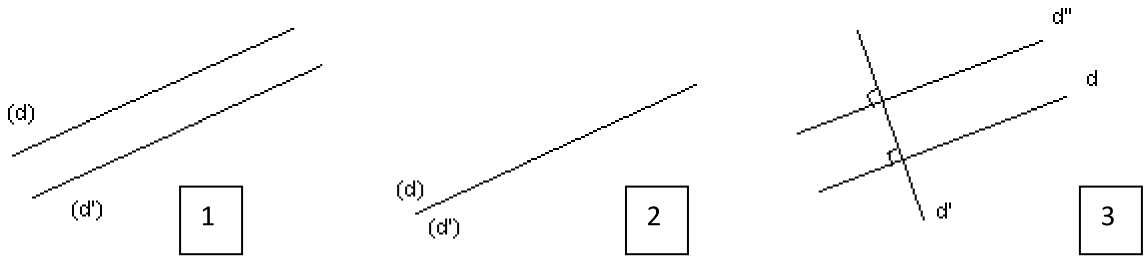
Deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle droit en se coupant.
Si deux droites sont perpendiculaires, elles déterminent alors quatre angles droits.

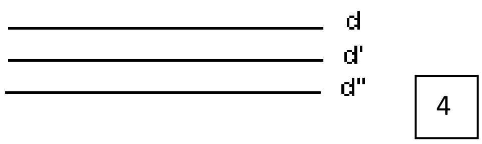


Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

- **Droites parallèles.**

Deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.
On note : (d) // (d')



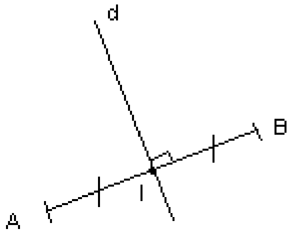


- ***Deux droites qui n'ont aucun point commun sont (strictement) parallèles*** (1).
- ***Deux droites qui ont tous leurs points confondus sont parallèles*** (2).
- ***Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles*** (3).
- ***Si une droite d est parallèle à une droite d' et si d' est parallèle à une droite d'', alors d et d'' sont également parallèles*** ➔ ***« transversalité du parallélisme »*** (4).

- **Milieu et médiatrice d'un segment.**

Milieu d'un segment ➔ point situé à égale distance de ses extrémités.
I est le milieu de AB si et seulement si AB = AI et I ∈ [AB].

Médiatrice d'un segment ➔ droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
C'est un axe de symétrie du segment.
I milieu de AB. (d) est la médiatrice de [AB] si et seulement si I ∈ (d) et (d) ⊥ (AB).



AI = IB ; d = médiatrice du segment [AB]

⇨ *On admet que l'ensemble des points équidistants de deux points A et B est une droite (d) qui est perpendiculaire à (AB) et qui passe par le milieu de [AB].*
Cette droite est appelée médiatrice du segment [AB]

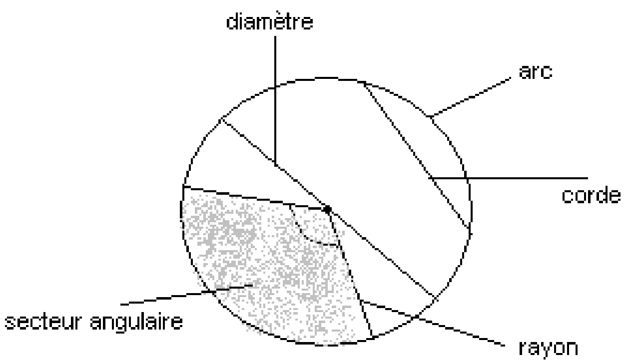
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

Les médiatrices des côtés d'un carré ou d'un rectangle sont aussi appelés **axes médians**.
Les segments joignant les milieux des côtés parallèles sont alors appelés **médianes du carré** ou **du rectangle**.

III. Les cercles, les disques.

Le cercle de centre O est l'**ensemble des points situés à égale distance du point O**.
Cette distance s'appelle le **rayon du cercle** (centre O et rayon R).

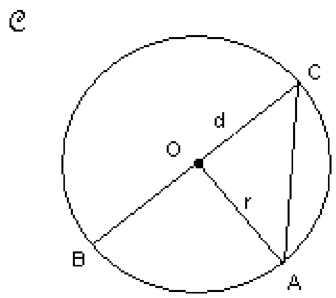
Le disque de centre O et de rayon R est l'**ensemble des points du cercle et ceux intérieurs au cercle**.



➢ Généralités.

[AC] = corde de C

$\overset{\frown}{AC}$ = arc de cercle



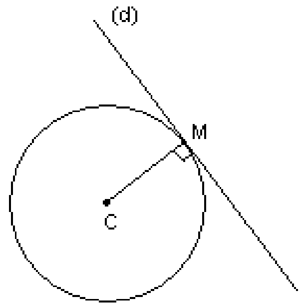
- Un **rayon** est : soit un nombre positif (r ou OA) ; soit un segment : [OA].
- Un **diamètre** est : soit un nombre positif (d ou BC) ; soit un segment [BC].

• Tangente à un cercle.

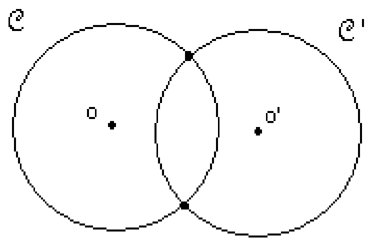
Une tangente est une droite qui n'a qu'un seul point commun avec le cercle.

Lorsque la droite *(d)* et le cercle *C* ont exactement un point commun M, ont dit que la droite et le cercle sont tangents en M ou encore que la droite *(d)* est la tangente du cercle *C* au point M.
(d) et C sont tangents si et seulement si il existe un point M commun à (d) et à C tel que (OM) $\perp$ (d)

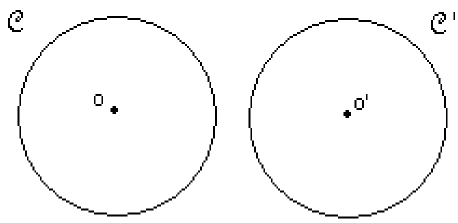
La <u>tangente à un cercle</u> de centre C en un point M situé sur le cercle est la <u>droite perpendiculaire</u> en M au rayon [CM].



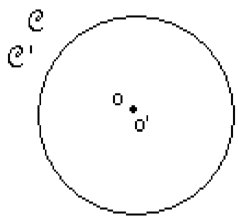
- **<u>Positions relatives de deux cercles</u> :**



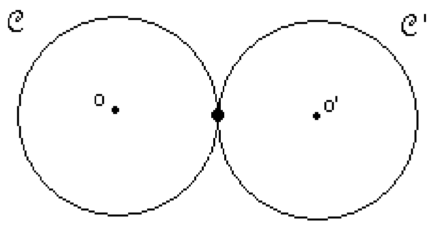
C et C ' sont sécants = deux points d'intersection



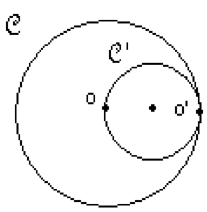
C et C' sont disjoints = pas de point d'intersection



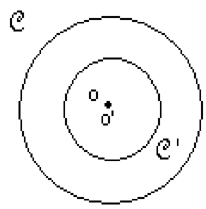
C et C' sont confondus



C et C' sont tangents extérieurement = un seul point d'intersection

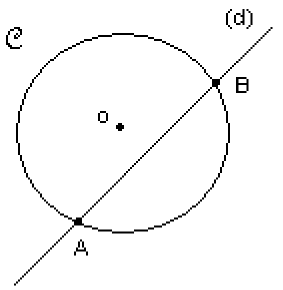


C et C' sont tangents intérieurement = un seul point d'intersection

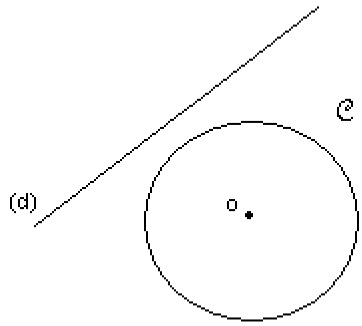


C et C' sont concentriques = ils ont le même centre

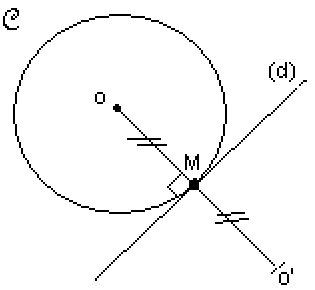
- **<u>Positions relatives d'un cercle avec une droite</u> :**



C et (d) sont sécants = deux points d'intersection



C et (d) sont disjoints



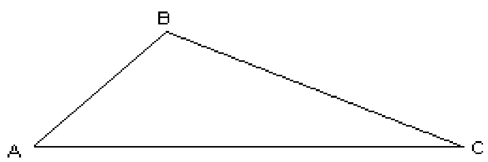
C et (d) sont tangents = un seul point d'intersection
(d) est la tangente de C

⇨ *La tangente (d) au cercle C de centre O en un point M est perpendiculaire à (OM).*

IV. Les triangles.

Un triangle est un **polygone à 3 côtés**. Somme des angles = 180°.

<u>Propriété 1</u> ➔ <u>propriété de l'inégalité triangulaire</u>.
Dans un triangle**, la longueur de n'importe quel côté est inférieur ou égal à la somme des longueurs des deux autres côtés**. De plus, **<u>AC = AB + BC si et seulement si B ∈ [AC]</u>.**



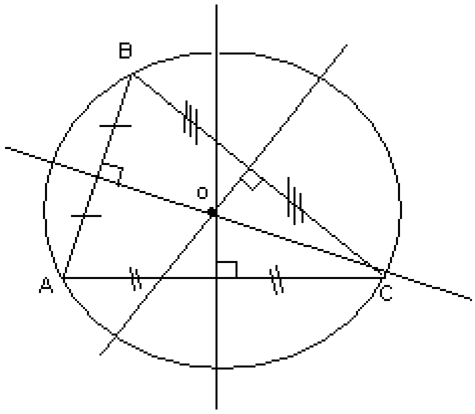
⇨ **AC < AB + BC**
⇨ **BC < AB + AC**
⇨ **AB < AC + BC**

<u>Propriété 2</u> ➔ La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

- **Médiatrice d'un triangle et cercle circonscrit.**

Les médiatrices d'un triangle sont celles de ses côtés = **droites perpendiculaires au côté passant par le milieu**.

Le **cercle circonscrit** est l'unique cercle passant par les trois points du triangle.



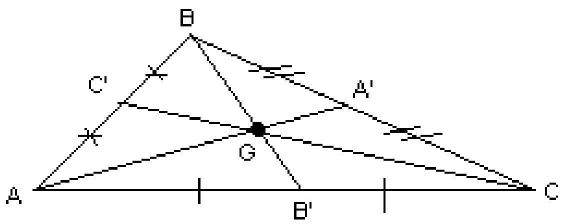
➩ *Les 3 médiatrices de ce triangle sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

- **Médianes et centre de gravité.**

La **médiane** est la **droite passant par le sommet et le milieu du côté opposé**.

Propriété ➔ dans un triangle, les trois médianes sont concourantes.
Leur point d'intersection G est le **centre de gravité** du triangle.

Le **centre de gravité** d'un triangle se situe au **2/3 de la médiane à partir du sommet**.

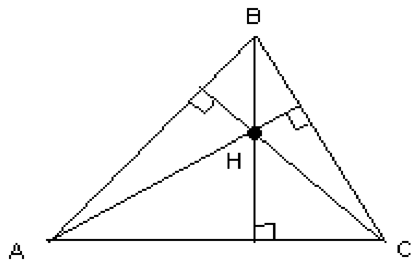


➩ **AG = 2/3 AA'**
➩ **BG = 2/3 BB'**
➩ **CG = 2/3 CC'**
➩ **A'G = 1/2 AG**
➩ **AG = 2 A'G**

- **Hauteurs et orthocentre.**

La hauteur est perpendiculaire au côté et passe par le sommet opposé.

Propriété ➔ **Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont concourantes.**
Leur point d'intersection H est l'**orthocentre** du triangle.

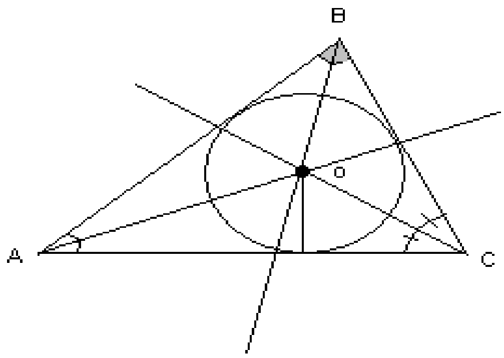


NB : dans le cas où le triangle a un angle obtus ou dans celui où il n'a que des angles aigus, l'orthocentre est extérieur.

- **Bissectrices et centre du cercle inscrit.**

La bissectrice coupe l'angle en deux angles égaux.

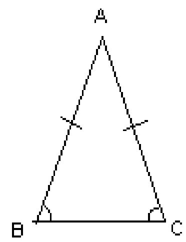
Propriété ➔ **Les trois bissectrices d'un triangle quelconque sont concourantes.**
Leur point d'intersection O est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle, c'est-à-dire intérieur au triangle et tangent aux trois côtés.



- **Les triangles particuliers.**

Triangle isocèle

Un triangle est isocèle s'il a **deux côtés de même longueur**.
Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A si AB = AC.



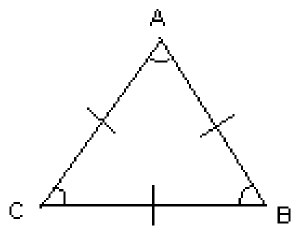
Propriété 1 ➔ Le triangle ABC est **isocèle** de sommet principal A si et seulement **si les angles adjacents à la base sont égaux**.

Propriété 2 ➔ Si le triangle ABC est isocèle de sommet principal A, alors **les quatre droites** *(hauteur issue de A, médiane issue de A, bissectrice issue de A et médiatrice de la base [BC])* **sont confondues**.

Propriété 3 ➔ Dans un triangle ABC, **si deux des quatre droites sont confondues**, alors il est isocèle de sommet principal A.

Triangle équilatéral

Un triangle est équilatéral si ses **trois côtés ont même longueur**.



Propriété 1 ➔ Un triangle est **équilatéral** si et seulement **si ses angles mesurent tous 60°**.

Propriété 2 ➔ Un triangle est **équilatéral** si et seulement **si il est isocèle et a un angle de 60°**.

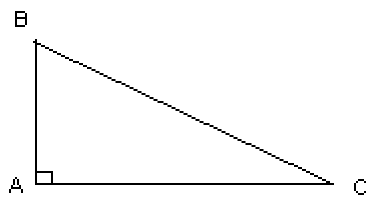
Propriété 3 ➔ Si le triangle ABC est équilatéral alors **les points** *(centre de gravité, orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit)* **sont confondus**.

Propriété 4 ➔ Si dans un triangle **deux des points** cités précédemment **sont confondus**, alors le triangle est équilatéral.

Triangle rectangle

Un triangle est rectangle s'il a **deux côtés perpendiculaires**.

Si le triangle ABC est rectangle en A, le côté opposé à A - c'est-à-dire [BC] – est l'**hypoténuse**.
Le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.



Propriété 1 → **Si un triangle ABC est rectangle en A, alors le cercle de diamètre [BC] passe par A,** ou le centre de son cercle circonscrit est le milieu de [BC].

- **Réciproquement** : **Tout triangle inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés est rectangle**.

- **Théorème de la médiane** : **la médiane issue de l'angle droit dans un triangle rectangle mesure la moitié de l'hypoténuse**.

Triangles isométriques (même mesure)

Deux triangles isométriques sont **superposables** → côtés de même longueur et angles de même mesure. On passe de l'un à l'autre par isométrie : transformation qui conserve les longueurs.

Propriété → Deux triangles sont isométriques si :

- **Les trois côtés sont égaux deux à deux**.
- **Deux côtés sont égaux et un angle est égal** *(celui formé par les deux côtés égaux)*.

Triangles semblables

Agrandissement ou rétrécissement de l'un par rapport à l'autre.

Propriété → Deux triangles sont semblables si :

- **Trois angles sont égaux**.
- **Deux angles sont égaux et un côté est proportionnel**.
- **Deux côtés sont proportionnels et l'angle formé par les côtés est égal**.

V. Les théorèmes.

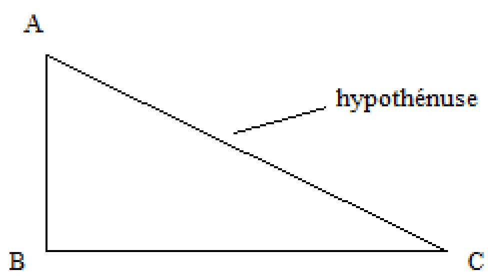
- **Le théorème de Pythagore.**

Énoncé : **Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit**.

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

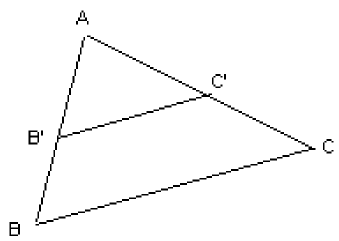
Réciproque : **Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle**.

⇨ ***Permet de prouver qu'un triangle est rectangle ou non.***

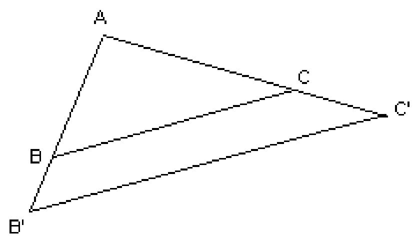


- **Le théorème de Thalès.**

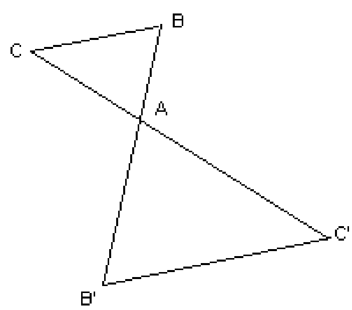
Soit un triangle ABC, un point B' sur (AB) et un point C' sur (AC) tels que (B'C') soit parallèle à (BC).
On considère donc les trois cas de figures suivantes :



B' ∈ [AB]
C' ∈ [AC]



B' ∈ [AB]
C' ∈ [AC]



B' ∈ [AB]
C' ∈ [CA]

$$\boxed{\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}}$$

➪ **Propriété complémentaire**

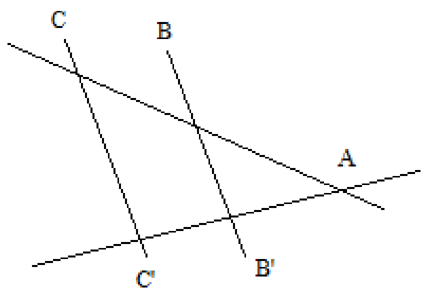
Soit un triangle ABC et une parallèle à (BC) coupant (AB) en B' et (AC) en C'.
Les deux triangles ABC et AB'C' ont leurs côtés correspondants proportionnels :

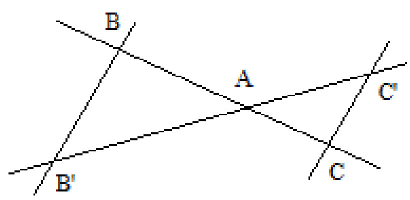
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Le théorème de Thalès permet le **calcul de certaines longueurs dans un triangle**, de **partager un segment en parts égales** et de **prouver que deux droites ne sont pas parallèles**.

Réciproque : *Soit un triangle ABC et (BC) et (B'C') deux droites sécantes en A.*

Si $\boxed{\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{C'C}{B'B}}$ **alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.**



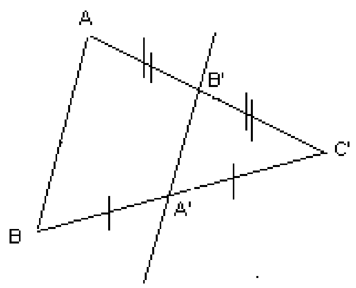


Cas particulier : le théorème de la droite des milieux dans un triangle.

- Dans un triangle, si une droite passe par les milieux des deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

- Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

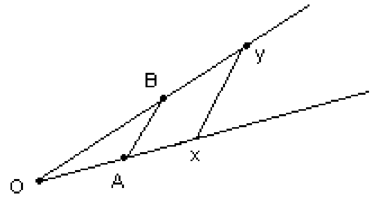
- Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.



ABC est un triangle. La parallèle à (AB) passant par le milieu A' de [BC] coupe [AC] en son milieu.

VI. Les angles.

Un angle du plan est une région du plan délimitée par des demi-droites [Ox) et [Oy) de même origine. Ces demi-droites sont les côtés de l'angle.
Le sommet de l'angle est l'origine commune aux demi-droites.

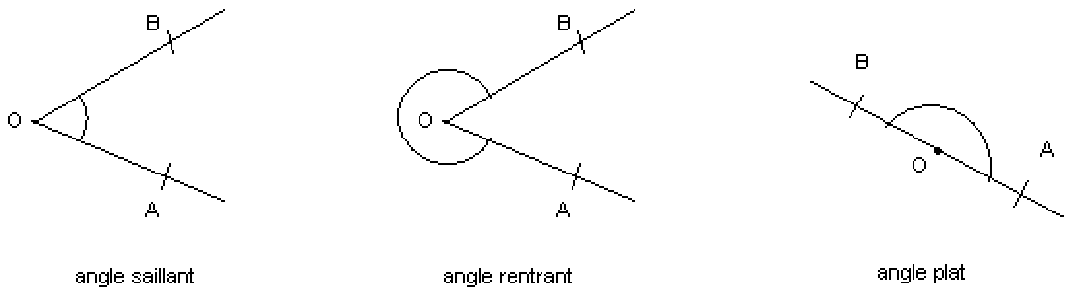


Le sommet d'un angle est toujours nommé en seconde position ➔ xÔy
La mesure d'un angle s'effectue toujours en **degrés (°)** ➔ xÔy = 30° par exemple.

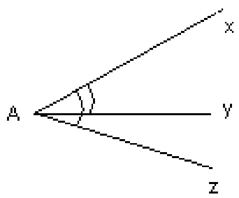
Quand **demi-droites confondues** → **angle saillant** = « angle nul ».
→ **angle rentrant** = « angle plein ».

- ✓ Un angle est **aigu** s'il est plus petit qu'un angle droit (donc **< 90°**).
- ✓ Un angle est **obtus** s'il est compris entre un angle droit et un angle plat ; c'est-à-dire s'il est compris **entre 90° et 180°.**
- ✓ L'angle **droit** mesure **90°**.
- ✓ L'angle **plat** mesure **180°**.
- ✓ Un angle est **saillant** s'il est **inférieur à un angle droit**.
- ✓ Un angle est **rentrant** s'il est **supérieur à un angle plat**.

La mesure d'un angle nul est 0° et celle d'un angle plein est 360°.



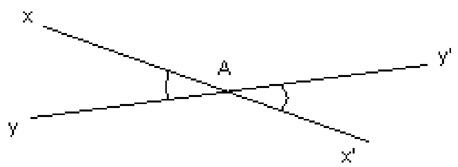
- ✓ Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leur mesure est égale à 90°.
- ✓ Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leur mesure est égale à 180°.
- ✓ Deux angles sont **adjacents** s'ils ont un sommet et un côté communs et s'ils sont situés de part et d'autre de ce côté.



⇨ *xÂy et yÂz sont adjacents.*

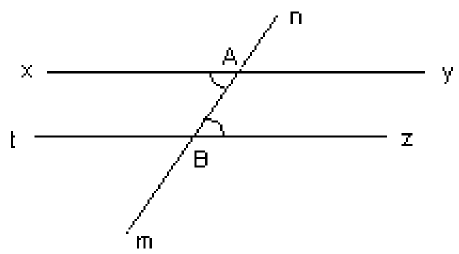
- **<u>Angles opposés par le sommet</u>.**

Les angles opposés par le sommet ont leur **sommet en commun** et **leur côté sont dans leur prolongement l'un de l'autre**. <u>Deux angles opposés par le sommet sont égaux</u>.



- **<u>Angles alternes-internes</u>.**

Des angles alternes-internes sont **formés par des droites parallèles** et sont **égaux**.



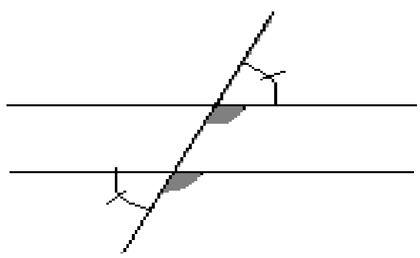
✓ <u>Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des **angles alternes internes égaux**</u>.

✓ **Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes internes égaux, alors ces deux droites sont <u>parallèles</u>.**

- **<u>Angles alternes externes</u>.**

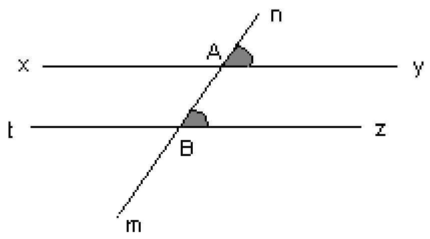
✓ <u>Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des **angles alternes externes égaux**</u>.

✓ **Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes externes égaux, alors ces deux droites sont <u>parallèles</u>.**



- **Angles correspondants.**

Les angles correspondants sont **formés par des droites parallèles** et sont **égaux**.



- ✓ Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des **angles correspondants égaux**.
- ✓ **Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux, alors ces deux droites sont parallèles**.

- **Bissectrice d'un angle.**

La bissectrice d'un angle est la droite qui passe par le sommet de l'angle et qui le partage en deux angles égaux.

Propriété ➔ La bissectrice d'un angle est aussi l'ensemble des points équidistants des côtés de cet angle.

VII. Polygones.

Un polygone est une **figure géométrique limitée par des côtés qui sont tous des segments**.

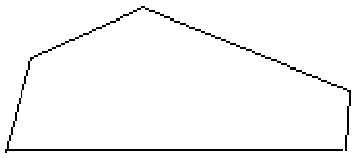
- ⇨ *Un polygone qui a **3 côtés** ➔ **triangle**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **4 côtés** ➔ **quadrilatère**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **5 côtés** ➔ **pentagone**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **6 côtés** ➔ **hexagone**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **8 côtés** ➔ **octogone**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **10 côtés** ➔ **décagone**.*
- ⇨ *Un polygone qui a **12 côtés** ➔ **dodécagone**.*

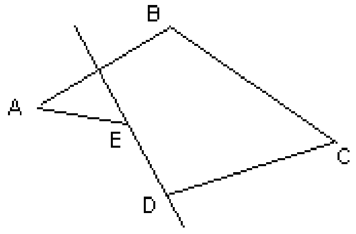
- **Polygones convexes, concaves, croisés.**

Croisé si deux côtés non consécutifs sont sécants.

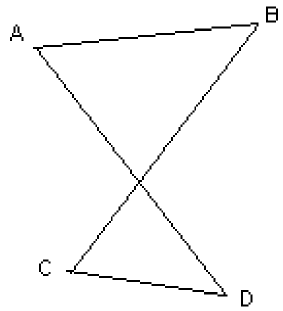
Concave si quels que soient les points intérieurs à celui-ci, le segment formé par ces points est entièrement à l'intérieur.

Convexe s'il est tout entier situé du même côté que toutes les « droites supports » de ses côtés.


polygone convexe



polygone concave



polygone croisé

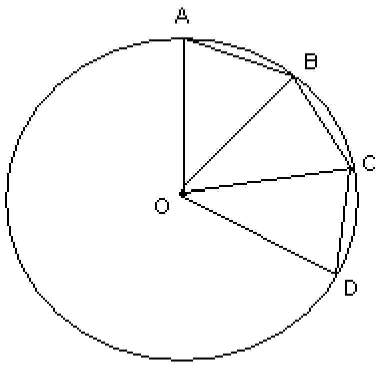
Somme des angles d'un polygone :

⇨ « *n* » étant le nombre de côtés du polygone, la somme de ses angles en degré = $\boxed{(n-2) \times 180}$

- **Polygones réguliers.**

Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle, tous ses côtés sont de même longueur et tous ses angles sont égaux *(c'est le cas du triangle équilatéral ou du carré par exemple)*.

Le cercle passant par tous les sommets du polygone est appelé **cercle circonscrit**.



Si un polygone ABCD est régulier de « n » côtés et si O est le centre du cercle circonscrit, alors :

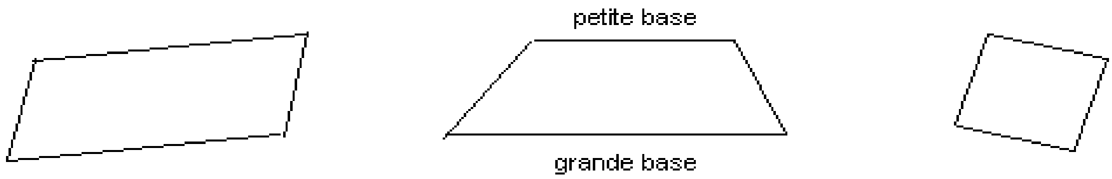
AÔB = BÔC = CÔD = … = 360°/n

VIII. Les quadrilatères.

Un quadrilatère est un polygone ayant **4 côtés**.

- **Les trapèzes.**

Un quadrilatère convexe est un trapèze s'il a deux côtés opposés parallèles.
Le plus grand de ces deux côtés est appelé **« grande base »** et le plus petit **« petite base »**.



*Les **parallélogrammes**, les **rectangles**, les **losanges**, les **carrés** sont des trapèzes particuliers.*

Trapèze isocèle

Un trapèze de bases [AB] et [CD] est un trapèze isocèle **si ses côtés non parallèles sont de même longueur**. Les rectangles et les carrés sont des trapèzes isocèles particuliers.

Propriété ➔ Les angles à la base d'un trapèze isocèle ont la **même mesure**.

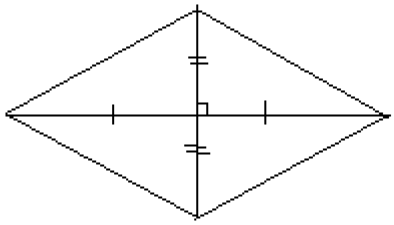
Trapèze rectangle

Un trapèze est dit **rectangle** s'il a un angle droit.

Propriété ➔ Si un quadrilatère est un trapèze rectangle, il a **au moins deux angles droits *(l'un des côtés est perpendiculaire aux autres)***.

- **Les parallélogrammes.**

Un quadrilatère ayant ses **diagonales qui se coupent en leur milieu** est un **parallélogramme**.
Le point d'intersection des diagonales est appelé **centre du parallélogramme**.



Propriété 1 ➔ **un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles**.
Réciproquement : un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

Propriété 2 ➔ **un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur**.
Réciproquement : un quadrilatère convexe ayant ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

Propriété 3 ➔ **un quadrilatère convexe ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme**.

*NB : Le **losange**, le **rectangle** et le **carré** sont des parallélogrammes particuliers.*

Carré et parallélogramme.

- ⇨ Un parallélogramme qui a **deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires** est un carré.
- ⇨ Un parallélogramme qui a des **diagonales de même longueur et perpendiculaires** est un carré.

Carré et losange.

- ⇨ Un losange qui a des **diagonales de même longueur** est un carré.
- ⇨ Un losange qui a **deux côtés consécutifs perpendiculaires** est un carré.

Carré et rectangle.

- ⇨ Un rectangle qui a des **diagonales perpendiculaires** est un carré.
- ⇨ Un rectangle qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un carré.

Carré et axe de symétrie.

- ⇨ Un carré admet quatre axes de symétries : **ses diagonales et les médianes de ses côtés**.

Parallélogramme et centre de symétrie.

- ⇨ Le **point d'intersection des diagonales** est le centre de symétrie du parallélogramme.

Parallélogramme et diagonale.

- ⇨ Les diagonales d'un parallélogramme **se coupent en leur milieu**.

Parallélogramme et côtés opposés.

- ⇨ Un parallélogramme a ses **côtés opposés deux à deux de même longueur**.

Parallélogramme et angles.

- ⇨ Un parallélogramme a des **angles opposés de même mesure**.
- ⇨ Un parallélogramme a des **angles consécutifs supplémentaires**.

Losange et parallélogramme.

- ⇨ Un parallélogramme qui a **deux côtés consécutifs de même longueur** est un losange.
- ⇨ Un parallélogramme qui a des **diagonales perpendiculaires** est un losange.
- ⇨ Un quadrilatère dont **les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre** est un losange.

NB : comme le losange est un parallélogramme, il possède toutes les propriétés de ce dernier.

Rectangle et parallélogramme.

- ⇨ Un parallélogramme qui a **deux côtés consécutifs perpendiculaires** est un rectangle.
- ⇨ Un parallélogramme qui a des **diagonales égales** est un rectangle.

Rectangle et axes de symétrie.

- ⇨ Un rectangle admet deux axes de symétries : **les médiatrices de ses côtés**.