Exercice 1

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \leqslant 0$ sur $[0; +\infty[$ $\left(f = \dfrac{1}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{-v'}{v^2} \right)$

1,5 Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et la suite u est décroissante.

2) $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}\right)$

" $= \dfrac{1}{n+1}$ 1,5

$v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$

Donc la suite v est croissante.

3) $w_n = n \cdot 5^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

* Pour tout $n \geqslant 1$ $w_n > 0$.

1,5 * $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)5^{n+1}}{n\,5^n} = \dfrac{n+1}{n} \times 5 = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \times 5 > 5 > 1$.

Donc la suite w est croissante.

Exercice 2

0,5 1) $D_{n+1} = D_n \times \left(1 - \dfrac{5}{100}\right) = 0,95\, D_n$.

La suite (D_n) est donc géométrique, puisque l'on passe d'un terme 0,5 quelconque au suivant en multipliant toujours par la même quantité $q = 0,95$, qui est la raison de cette suite.

1 $D_n = D_1 q^{n-1} = 300 \times 0,95^{n-1}$

2) $V = D_1 + D_2 + \dots + D_{30}$

$= D_1 \dfrac{1-q^{30}}{1-q} = 300 \times \dfrac{1-0,95^{30}}{1-0,95} = 6000\,(1 - 0,95^{30})$ 2

$\simeq 4712\ m^3$.

Exercice 3

1) Chaque année, un cinquième du gazon est détruit pendant l'été, donc il ne reste que $0{,}8u_n$ en gazon, mais Albert en replante $50\,m^2$ après avoir arraché du chiendent, donc :

1 $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$ pour tout $n \geq 0$.

2) $u_2 = 1370 = 0{,}8u_1 + 50 \Rightarrow u_1 = \dfrac{1370-50}{0{,}8} = 1650\,m^2$

1,5 $u_1 = 0{,}8u_0 + 50 \Rightarrow u_0 = \dfrac{u_1 - 50}{0{,}8} = \dfrac{1600}{0{,}8} = 2000\,m^2$.

La surface initiale de la pelouse est de $2000\,m^2$.

3) $v_n = u_n - 250$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$

$\quad" = 0{,}8u_n + 50 - 250$

$\quad" = 0{,}8u_n - 200$ Or $\dfrac{200}{0{,}8} = 250$.

1,5 $\quad" = 0{,}8(u_n - 250)$

$v_{n+1} = 0{,}8v_n$ pour tout $n \geq 0$.

0,5 La suite v est donc géométrique, de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1750\,m^2$ et de raison $q = 0{,}8$.

4) $v_n = v_0 q^n = 1750 \times 0{,}8^n$

1 et $v_n = u_n - 250$, donc $u_n = v_n + 250 = 1750 \times 0{,}8^n + 250$.

5) rque La suite u est décroissante car la suite v, de 1er terme positif, et de raison $q \in]0;1[$, l'est. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 250$. Ainsi il existera un moment à partir duquel on aura $u_n \leq \dfrac{u_0}{4}$, c'est à dire $u_n \leq 500\,m^2$.

Avec la calculatrice, on trouve que $u_8 \simeq 543{,}6\,m^2$

1 et $u_9 \simeq 484{,}9\,m^2$. Donc Albert garde plus du quart de sa pelouse pendant 8 ans.

Exercice 4.

1) On répète 12 fois dans les mêmes conditions (tirages avec remise) l'épreuve de Bernoulli suivante : la composition prélevée peut être défectueuse (avec $P(D) = 0{,}025$) ou pas, indépendamment des précédentes. La variable aléatoire X qui compte, parmi ces $n=12$

2 compositions, combien sont défectueuses, suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(12, 0{,}025)$.

2) On sait que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 12\}$ $P(X=k) = \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$ où $p = 0{,}025$.

1,5 Donc $P(X=2) = \binom{12}{2} 0{,}025^2 \times 0{,}975^{10} \simeq 66 \times 6{,}25 \cdot 10^{-4} \times 0{,}776 \simeq 0{,}0320$

La probabilité qu'il y ait exactement deux compositions défectueuses est d'environ 3,2%.

3) $P(X=0) + P(X=1) = P(X \leqslant 1)$

1,5 Donc $P(X \leqslant 1) = 0{,}975^{12} + 12 \times 0{,}025 \times 0{,}975^{11} \simeq 0{,}965$

La probabilité qu'il y ait au plus une composition défectueuse est d'environ 96,5%.