Université Antilles–Guyane
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Dépt Scientifique Interfacultaire

DEUG MIAS 2e année
Algèbre 3
1^{er} semestre 2005–2006

T.D. série 6 : anneaux, idéaux et corps

Exercice 1. Montrer que l'ensemble $L(E)$ des endomorphismes d'un e.v. E, munie de $+$ et de $\circ$, forme un anneau (unitaire, non-commutatif si $\dim E > 1$).

Exercice 2. (a) Soit A un anneau. Rappeller pourquoi l'ensemble $\mathcal{M}_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A est un anneau.

(b) Montrer que l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(A)$. Est-ce que c'est un idéal de $\mathcal{M}_n(A)$?

(c) Montrer que l'ensemble N des matrices dont la première ligne est nulle, est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(A)$, mais pas un idéal bilatère.

(d) Donner un idéal bilatère (non trivial) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

Exercice 3. Soit $A = \{\, M_{a,b,c} \ ;\ a,b,c \in \mathbb{C}\,\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ avec $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que A est un sous-anneau unitaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(b) Montrer que $I = \{\, M_{a,b,c} \ ;\ a+b+c = 0\,\}$ est un idéal principal de A.

(c) Est-ce que I est un idéal maximal de A ?

Exercice 4. (anneau de Boole) Soit A un anneau A tel que $\forall x \in A : x^2 = x$.

(a) Montrer que $\forall x \in A : x + x = 0$.

(b) Montrer que A est commutatif.

(c) Pour $x, y \in A$, calculer $xy(x+y)$. En déduire que A n'est pas intègre si $\operatorname{card} A > 2$.

(d) Montrer qu'il existe un seul tel anneau à deux éléments.

Exercice 5. On considère l'anneau $X = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes.

(a) Montrer que $M = \{\, x \in X \mid \exists p \in \mathbb{Z} : \frac{x_n}{n^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,\}$ est sous-anneau de X.

(b) Montrer que $N = \{\, x \in X \mid \forall q \in \mathbb{Z} \mid \frac{x_n}{n^q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,\}$ est un idéal de M.

(c) On appelle $\overline{\mathbb{C}} = M/N$ anneau de nombres complexes généralisés (de Colombeau). Montrer que ce n'est pas un corps.

Exercice 6. Soit A un anneau unitaire commutatif, et $I \neq A$ un idéal de A. Montrer qu'il a a équivalence entre

(a) l'anneau quotient A/I est intègre,

(b) $A \setminus I$ est une partie stable par multiplication,

(c) l'idéal I est le noyau d'un morphisme de A dans un corps.

Exercice 7. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = -2$. On note $\mathbb{Z}[w] = \{\, a + b\, w; a, b \in \mathbb{Z} \,\}$, $\mathbb{Q}[w] = \{\, a + b\, w; a, b \in \mathbb{Q} \,\}$, et $N : \mathbb{Q}[w] \to \mathbb{Q},\ a + w\, b \mapsto a^2 + 2\, b^2$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[w]$ et $\mathbb{Q}[w]$ sont sous-anneaux unitaires de $\mathbb{C}$.

(b) Vérifier que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}[w],\ N(x\, y) = N(x)\, N(y)$.

(c) Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[w]$ ssi $N(x) = 1$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}[w],\ \exists y \in \mathbb{Z}[w] : N(x - y) < 1$.

(e) Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[w],\ \beta \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[w]$ tels que $\alpha = \beta\, q + r,\ N(r) < N(\beta)$. (Un tel anneau est appelé **euclidien**.)

(f) En déduire que $\mathbb{Z}[w]$ est principal.

Exercice 8. (Polynômes) Soit A un anneau unitaire. Les suites à valeurs dans A et à support fini sont notés $A^{(\mathbb{N})} = \left\{\, a \in A^{\mathbb{N}} \mid \exists N > 0 : \forall n > N, a_n = 0 \,\right\}$.

(a) Montrer que $A^{(\mathbb{N})}$ est un sous-groupe de $(A^{\mathbb{N}}, +)$, et que la multiplication définie par $a \cdot b := c$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ en fait un anneau unitaire.

(b) Montrer que $\varphi : A \to A^{(\mathbb{N})},\ x \mapsto (x, 0, 0...)$, est un morphisme injectif d'anneaux unitaires, permettant de voir A comme sous-anneau de $A^{(\mathbb{N})}$.

(c) On pose $X = (0, 1, 0, 0...)$ $(= (\delta_{i1})_{i \in \mathbb{N}})$. Montrer que tout $a \in A^{(\mathbb{N})}$ s'écrit $a = \sum_i a_i\, X^i$, où la somme s'arrète à $i = \deg a = \sup \{\, k \mid a_k \neq 0 \,\}$.
On retrouve ainsi l'anneau des polynômes qu'on note dorénavant $A[X]$.

(d) Pour deux polynômes a, b on définit leur composée par $a \circ b = a(b) = \sum a_i\, b^i$. Montrer que $(A[X], \circ)$ est un monoïde.

(e) Soit A' un sur-anneau de A. Montrer que pour tout $x \in A'$, l'application $e_x : a \mapsto \sum a_i\, x^i$ est un morphisme d'anneaux de $A[X]$ dans A'.

(f) Soit I l'idéal engendré par $1 + X^2$. Etudier l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/I$.

Exercice 9. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{C} \right\}$, où $\bar{a}$ est le complexe conjugué de a. Montrer que $(H, +, \cdot)$ est un corps non commutatif.

Exercice 10. (corps des fractions) Soit A un anneau intègre (commutatif, unitaire). On pose $A^* = A \setminus \{\, 0 \,\}$ et $E = A \times A^*$.

(a) Montrer que la relation binaire $\mathcal{S}$ définie par $(a, b)\, \mathcal{S}(c, d) \iff ad = cb$, est une relation d'équivalence sur E.

(b) On munit E de deux lois, $(a, b) \oplus (c, d) = (ad + cb, bd)$ et $(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$. Vérifier que $\mathcal{S}$ est compatible avec $\oplus$ et $\otimes$.
Notons $+, \cdot$ les lois-quotient.

(c) Montrer que $(E/\,\mathcal{S}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

(d) Montrer que $\varphi : A \to E/\,\mathcal{S},\ a \mapsto \widetilde{(a, 1)}$, est un morphisme d'anneaux injectif ; en déduire qu'on peut voir A comme sous-anneau de $E/\,\mathcal{S}$.

(e) Applications : (i) $A = \mathbb{Z}$; (ii) $A = \mathbb{K}[X]$ $(\Rightarrow\ E/\,\mathcal{S} = \mathbb{K}(X))$.