

Géométrie dans l'espace

On désigne par E l'ensemble des points de l'espace et par W l'ensemble

des vecteurs de l'espace. E est muni d'un repère orthonormal $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est W muni de la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaires dans l'espace :

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriétés : * pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et tous réel α et β

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{u}^2 = \ \vec{u}\ ^2$
$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$	$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

* E est muni d'un repère orthonormal $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de W

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
4. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (inégalité de Cauchy Schwarz)
5. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité de Minkowski)

Déterminant de trois Vecteurs : Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de W et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de W tel que

$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$$

Théorème : soit A, B, C et D quatre points de E . Le triplet $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ est une base de W si et seulement si

\vec{AB}, \vec{AC} et \vec{AD} n'est pas liée si et seulement si $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \neq 0$ si et seulement si \vec{AB}, \vec{AC} et \vec{AD} ne sont pas coplanaires si et seulement si A, B, C et D ne sont pas coplanaires

Vecteurs colinéaires :

❖ deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires Si l'un est produit de l'autre par un réel

❖ $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de W , \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

Droite :

Etant donné un point A et un vecteur non nul \vec{u} :

* La droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} (notée $D(A, \vec{u})$) est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

* Etant donné deux points A et B on $(AB) = D(A, \overrightarrow{AB})$.

* **Equations paramétriques d une droite de l'espace**

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z)$

$$\begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases}$$

Ce système est une représentation paramétriques de la droite \mathcal{D} dans l'espace

$M \in D(A, \vec{u})$ équivaut à Il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ équivaut à

* **Equations cartésienne d une droite dans le plan**

* Le plan est muni d un repère (O, \vec{u}, \vec{v}) l'ensemble des points M tel que $a x + b y + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est

une droite D de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ ou de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

* Etant donné deux points A , et \vec{u} un vecteur non nul

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A(x_0, y_0)$ et $M(x, y)$,

$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = b(x - x_0) - a(y - y_0)$ fournit une équation Cartésienne de la droite $D(A, \vec{u})$

Plan :

Equations paramétriques d un plan de l'espace

Etant donné un point A , \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z)$, $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$

si et seulement si Il existe un unique couple réels (α, β) tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases}$

Ce système est une représentation paramétrique du plan P

Equations cartésienne d un plan de l'espace : Tous plan de l'espace admet une équation de la forme $a x + b y + c z + d = 0$ ou a, b et c sont des réel non tous nuls

Réciproquement : Si un plan P à pour équation $a x + b y + c z + d = 0$ alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

* Etant donné un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan P alors pour tous point $M \in P$

$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal \vec{n}

* Etant donné un point $A \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non colinéaires du plan P

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} A(x_0, y_0, z_0) \in M(x, y, z)$, alors pour tous point $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ $\det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ est une équation

cartésienne du P

Orthogonalité dans l'espace :

* \vec{u}, \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$

* Soit deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectives \vec{u}, \vec{v}

On a alors : $D \perp D'$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

* Un vecteur normal à une droite est un vecteur orthogonal au vecteur directeur de la droite .

* Un vecteur non nul \vec{n} est normal au plan $P(o, \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$

* Soit une droite D de vecteur directeur \vec{u} et $P(o, \vec{v}, \vec{w})$ un plan

$D \perp P$ si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

* Deux vecteurs non nuls \vec{n}, \vec{n}' sont normaux à un même plan si et seulement si ils sont colinéaires.

* Soit deux plan P et P' de vecteurs normaux respectives \vec{n}, \vec{n}'

On a alors : $P \perp P'$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

$P // P'$ si et seulement si \vec{n}, \vec{n}' sont colinéaires

* Soit deux plans $P : ax+by+cz+d=0$ et $P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$

Avec a', b' et c' trois réels non nuls on a : $P // P'$ si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Produit vectoriel dans l'espace :

Soient \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de W et A, B et C trois points de E tel que $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}$ on appelle produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} le vecteur \vec{w}

noté $\vec{u} \wedge \vec{v} \in W$ * Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{w} = \vec{0}$

* Si non \vec{w} est l unique vecteur tel que

1. \vec{w} est normal au plan (ABC)
2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de W
3. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Propriétés : Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs de W α un réel.

On a : * $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$; $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$

* $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

* $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$

* $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Expression analytique du produit vectoriel : Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W , si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont

deux vecteurs de W alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} = (yz' - zy') \vec{i} - (xz' - zx') \vec{j} + (xy' - yx') \vec{k}$

Sinus et cosinus de l'angle de deux vecteurs : Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls de W

$$|\sin(\theta)| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

E est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Distance d un point à un plan :

* E est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Soit le plans $P : ax+by+cz+d \neq 0$, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace est H le projeté orthogonale de A sur P , la distance du point A au plan P est :

$$d(A, P) = AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

* Soit D une droite de vecteur directeur \vec{u} et B un point de D

La distance d'un point A de l'espace à la droite $D(B, \vec{u})$ est le réel

$$d(A, D) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

L'aire d un triangle : soit A, B et C trois points non alignés de E

L'aire d un triangle ABC est égale à $A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

L'aire d un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $A = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$

Volume d'un parallélépipède

Le volume d'un parallélépipède $ABCDEFGH$ est égale à

$$V = |\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})| = |(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = B \cdot h \quad B : \text{l'aire de la base et } h : \text{hauteur}$$

Volume d'un tétraèdre Le Volume d'un tétraèdre $ABCD$ est égale à :

$$V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{3} B \cdot h \quad B : \text{l'aire de la base et } h : \text{hauteur}$$

Equations cartésienne d'une sphère :

* Soit $I(a,b,c)$ un point de l'espace rapporté a un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est R un réel positif.

Une équation cartésienne de la sphère $S(I, R)$ de centre I et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

* Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l'espace on désigne par H la projeté orthogonale du point I sur le plan P et on pose $d=IH$

- Si $d < R$ alors $P \cap S$ est le cercle du plan P de centre H et de rayon

$$R' = \sqrt{R^2 - d^2} \quad \text{et on dit que } P \text{ et } S \text{ sont sécants suivant ce cercle}$$

- Si $d=R$ alors $P \cap S = \{H\}$ et on dit que P et S sont tangents en H

- Si $d > R$ $P \cap S = \emptyset$ et on dit que P et S sont disjoint

Les réflexes à avoir

❖ Ne pas oublier que vous travailler dans l'espace et que tout point est définie dans un repère par son triplet de coordonnées.

❖ Le produit scalaire permet de démontrer que des droites sont orthogonales de calculer des angles géométriques, de trouver des équations de cercles ou de sphère et de trouver des équation cartésienne du plan.

❖ Un produit scalaire peut se calculer à l'aide de quatre formules

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ sont deux vecteurs de } W$$

soient A, B, et C trois points de E tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ ou le point H est le projeté Orthogonale du point C sur (AB)

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$3) \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$4) 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

En général vous choisirez des quatre formules selon l'énoncé de l'exercice

*La représentation paramétriques d'une droite D de l'espace sous la forme $\begin{cases} x = \alpha k + x_0 \\ y = \beta k + y_0 \\ z = \gamma k + z_0 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Permet d'affirmer que le point $A(x_0, y_0, z_0)$ est un point de la droite et que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite

❖ Penser que si un plan P à pour équation $ax+by+cz+d=0$ alors le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à P

❖ Soit $P : ax+by+cz+d=0$ un plan de l'espace E et soit $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Un vecteur de l'espace. \vec{u} est un vecteur du plan P si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

❖ soient A, B, C et D quatre points de E tel que A, B, C ne sont pas alignés. Alors ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

❖ Etant donné un point $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan P alors pour tous point

$$M(x, y, z) \in P \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ est une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal } \vec{n}$$

❖ Soient \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs de W . $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ si et seulement si \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires

❖ Etant donné un point $A \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires du plan P

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z)$ alors pour tous point

$$M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0 \text{ sig}$$

$$\det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x-x_0 & a & a' \\ y-y_0 & b & b' \\ z-z_0 & c & c' \end{vmatrix} = (x-x_0) \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - (y-y_0) \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + (z-z_0) \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$$

est une équation cartésienne du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

❖ $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, A(x_0, y_0, z_0)$ et $M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$

La représentation paramétrique du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ de l'espace sous la forme $\begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

❖ il ne faut pas penser que deux plans perpendiculaires a un même plan sont parallèle (ils peuvent l'être mais en générale, ils ne le sont pas)

❖ Dans l'espace si deux droites ne sont pas parallèles alors elles ne sont pas nécessairement sécantes (elles peuvent être non coplanaire)

Sécants selon une droite

❖ Deux plans peuvent

Parallèles

strictement

confondus

❖ Soient A et B deux points de E

• L'ensemble Γ_1 des points M tel que : $AM=BM$ est donc le plan médiateur du segment $[AB]$

• L'ensemble Γ_2 des points M tel que : $AM=R$ avec $R>0$ est donc la sphère S de centre A est de rayon R

• L'ensemble Γ_3 des points M de l'espace tel que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

• L'ensemble Γ_4 des points M de l'espace tel que $\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{0}$ est la droite (AB)

• L'ensemble Γ_5 des points M de l'espace tel que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$ est Le plan orthogonal a \vec{AB} passant par A



