Contrôle Terminal
Outils Mathématiques

Mardi 24 avril 2018, 10h - 12h, durée : 2 heures

Remarques générales : Aucun document écrit ni calculatrice ne sont admis. L'usage des téléphones portables est interdit et ces téléphones doivent être éteints et ne doivent pas être posés sur la table.
Toutes les réponses doivent être clairement justifiées et, lors de la correction, une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction.
Le sujet comporte deux pages et les exercices sont indépendants.

* * *

Exercice I : Matrices

I-1. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On admet que cette matrice est régulière. Calculer la matrice inverse de A.

I-2. Soit B la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Déterminer si la matrice B est régulière ou singulière et justifier la réponse. Calculer le produit matriciel AB et la trace du produit BA.

Exercice II : Diagonalisation

Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

II-1. Rappeler une définition du polynôme caractéristique d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier naturel non nul.

Déterminer les valeurs propres de A. Peut-on en conclure que la matrice A est diagonalisable ?

II-2. Déterminer les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ou non ?

II-3. On note U la matrice de passage de la base propre vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner une expression possible de U et calculer la matrice inverse U^{-1}

(*Indication :* Pour calculer l'inverse, on pose la relation $A\vec{x} = \vec{y}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs quelconques, et on exprime $\vec{x}$ en fonction de $\vec{y}$. Toute autre méthode de calcul de l'inverse de la matrice est également acceptée).

Donner la matrice diagonale D associée à l'expression choisie ci-dessus pour U. Quelle relation existe-t-il entre A et D ? Comment appelle-t-on ce genre de relation ?

II-4. En utilisant la question précédente, donner l'expression de A^n en fonction de U, D et U^{-1} pour n entier naturel quelconque (**on n'effectuera pas** le calcul matriciel donnant A^n)

Exercice III : Equations Différentielles

Soit V l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire suivante, pour $x > 0$:

$$x^2\,\psi''(x) + 5\,x\,\psi'(x) + 4\,\psi(x) = 0\ . \tag{1}$$

III-1. Chercher une première solution de cette équation sous la forme : $x \longmapsto \psi_1(x) = x^\alpha$, où α est un réel à déterminer.

III-2. Rappeler, **sans démonstration**, l'équation différentielle vérifiée par W, le déterminant de Wronski associé à l'équation (1), et la résoudre.

III-3. À l'aide du déterminant de Wronski W, écrire une équation différentielle d'ordre 1 pour une deuxième solution $\psi_2(x)$ de (1). Résoudre cette équation et donner la solution générale de l'équation (1).