Chapitre 1

Notions de logique

1.1 Éléments de logique

Définition 1.1.1. *Une* assertion *ou* proposition *est un énoncé auquel on peut attribuer la valeur vrai ou faux.*

Les propositions sont notées par des lettres majuscules P, Q, R, …

Dans ce cours nous utiliserons tout le temps le mot *assertion* et nous réservons le mot *proposition* à un usage qui sera expliqué dans le chapitre suivant.

En mathématiques, on se situe dans le cadre d'une logique à deux valeurs. Une assertion mathématique P est soit vraie soit fausse. Si elle est vraie, nous lui attribuons la valeur 1, (ou V) ; si elle est fausse, nous lui attribuons la valeur logique 0, (ou F).

On peut trouver des assertions toujours vraies, par exemple « $x^2 \geqslant 0$ »pour x réel ou « $0 = 0$ »qu'on appelle des tautologies ; des assertions toujours fausses, par exemple « $0 = 1$ »et des assertions tantôt vraies, tantôt fausses, par exemple « $x^2 = 1$ »qui est vraie pour $x = 1$ ou $x = -1$, et fausse sinon.

Un axiome, un postulat, un théorème sont des assertions vraies.

A partir d'assertions données, on peut en former de nouvelles, à l'aide de connecteurs logique.

Définition 1.1.2 (Connecteurs logiques)**.**

- *La* négation *: le « non ». L'assertion « non P » vraie signifie que l'assertion P est fausse. On note aussi : $\overline{P}$*
- *La* conjonction *: le « et ». L'assertion « P et Q »vraie signifie que les deux assertions sont vraies en même temps. On la note aussi : $P \wedge Q$*
- *La* disjonction *: le « ou ». L'assertion « P ou Q », qui est vraie si l'une au moins des assertions P ou Q est vraie. On la note aussi : $P \vee Q$*
- *L'*implication *: On peut considérer que les phrases suivantes ont le même sens :*

  - *si l'assertion ≪ P ≫ est vraie, alors l'assertion ≪ Q ≫est vraie,*
  - *si ≪ P ≫alors ≪ Q ≫.*
  - *P implique Q. On note ≪ $P \implies Q$ ≫*
- *Une* équivalence logique *est la conjonction d'une assertion et de sa réciproque. On note ≪ $P \iff Q$ ≫.*

  ≪ $P \iff Q$ ≫ signifie ≪ ($P \implies Q$) et ($Q \implies P$) ≫. Elle est vraie si P, Q sont simultanément vraies et si elles sont simultanément fausses.

1.1.1 Négation

nous noterons (non P) le contraire de l'assertion P, c'est-à-dire l'assertion qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie.

Négation de la négation Une propriété immédiate est que (non(non P)) est équivalente à P.

1.1.2 Conjonction

Lorsque l'on a deux assertions ≪ P ≫ et ≪ Q ≫, on peut former une nouvelle assertion appelée la *conjonction* de ces deux assertions, que l'on notera ≪ P et Q ≫. L'assertion ≪ P et Q ≫ vraie signifie que les deux assertions sont vraies en même temps. Par exemple pour deux nombres x et y réels, l'assertion ≪ $x^2+y^2 = 0 \gg$ équivaut à ≪ $x = 0$ et $y = 0$. ≫

Commutativité Il est clair que

$$(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$$

Table de vérité de la conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.1.3 Disjonction

Lorsque l'on a deux assertions P, Q, on peut aussi former une assertion que l'on appelle la *disjonction* de ces deux assertions, que l'on note *(P ou Q)*, qui est vraie si l'une au moins des assertions P ou Q est vraie.

Attention, ce point diffère du langage courant. En mathématiques, le *ou* est non exclusif, c'est-à-dire qu'il comprend la possibilité que les deux assertions soient vraies. Ainsi l'assertion $\ll xy = 0 \gg$ équivaut à l'assertion $\ll x = 0 \gg$ ou $\ll y = 0 \gg$, elle est vraie quand l'un des deux nombres est nul, elle est aussi vraie quand les deux sont nuls.

Commutativité Il est clair que (P ou Q) $\iff$ (Q ou P)

Table de vérité de la disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.4 Lois de Morgan

Le mathématicien De Morgan a énoncé des lois qui indiquent comment prendre la négation d'une disjonction, ou la négation d'une conjonction.

Négation de la disjonction D'après l'inventaire des trois cas possibles pour l'assertion « P ou Q », l'assertion « non(P ou Q) » signifie que l'on a « P » faux et « Q » faux, c'est-à-dire que l'on a l'assertion « non(P) et non(Q) » :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q\ ) \iff \text{non}(P) \text{ et non}(Q)$$

Négation de la conjonction L'assertion « non(P et Q) » signifie que l'on est dans l'un des trois cas « P » faux et « Q » vrai, « P » faux et « Q » faux, « P » vrai et « Q » faux, c'est-à-dire que l'on a l'assertion « non(P) et non(Q) » :

$$\text{non}(P \text{ et } Q\ ) \iff \text{non}(P) \text{ ou non}(Q)$$

Règles de distributivité La conjonction est distributive par rapport à la disjonction : (P et (Q ou R) équivaut à ((P et Q) ou (P et R)).

La disjonction est distributive par rapport à la conjonction :

(P ou (Q et R)) équivaut à ((P ou Q) et (P ou R))

On peut démontrer la distributivité par les tables de vérité.

$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \iff ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R))$$

1.1.5 Implication

Un théorème qui s'énonce sous la forme ≪ si l'hypothèse P est vraie alors la conclusion Q est vraie, s'exprime formellement sous la forme ≪ P implique Q ≫ et on note : ≪ $P \implies Q$ ≫.

Table de vérité de l'implication

P	Q	non P	$P \implies Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Une façon plus ancienne, mais qu'il faut connaître, exprime un théorème sous la forme de condition nécessaire ou sous la forme de condition suffisante. Prendre bien garde qu'un théorème admet ces deux expressions.

Condition nécessaire, condition suffisante Il s'agit d'une autre façon d'exprimer les implications. Les phrases suivantes ont le même sens :

- ≪ $P \implies Q$ ≫ ;
- Pour que ≪ P ≫ soit vraie, il faut que ≪ Q ≫soit vraie ;
- ≪ Q ≫ est une condition nécessaire pour que ≪ P ≫ ;
- Pour que ≪ Q ≫, il suffit que ≪ P ≫ soit vraie ;
- ≪ P ≫ est une condition suffisante pour que ≪ Q ≫.

La même implication peut dont s'écrire :

- soit comme une condition suffisante , ≪ pour que la conclusion soit vraie, il suffit que l'hypothèse soit vraie ≫.
- soit comme une condition nécessaire, ≪ pour que l'hypothèse soit vraie, il faut que la conclusion soit vraie. ≫

Contraposée d'une implication. À toute assertion $\ll P \implies Q \gg$, on peut associer une assertion qu'on appelle sa contra-posée. Ces deux assertions sont vraies en même temps.

$\ll$ (non Q) $\implies$ (non P) $\gg$est la contraposée de $\ll P \implies Q \gg$.

$\ll P \implies Q \gg$ est la contraposée de $\ll$ (non Q) $\implies$ (non P) $\gg$

On a vu que les phrases suivantes sont équivalentes :

– $P \implies Q$
– (non P) ou Q

L'implication $\ll P \implies Q \gg$ est donc aussi équivalente à

(non(non Q)) ou (non P)

c'est-à-dire à

(non Q) $\implies$ (non P)

Définition 1.1.3. *L'assertion $\ll$ (non Q) $\implies$ (non P) $\gg$ s'appelle la* la contra-posée *de l'implication*
$\ll P \implies Q \gg$; elle lui est équivalente.

On a donc toujours $\ll P \implies Q$ équivaut à $\ll$ (non Q) $\implies$ (non P) $\gg$

Remarques

L'implication contra-posée de $\ll P \implies Q \gg$n'a pas la même signification que l'implication réciproque de $\ll P \implies Q \gg$ qui est $\ll Q \implies P \gg$.

La *réciproque* de l'assertion $\ll P \implies Q \gg$ est l'assertion $\ll Q \implies P \gg$. Donc à toute assertion "P implique Q" où l'hypothèse de la première est devenue la conclusion de la seconde et la conclusion de la première est devenue l'hypothèse de la seconde.

Négation d'une implication Comment écrire la négation de l'assertion $\ll P \implies Q \gg$?

Pour écrire la négation de l'assertion $\ll P \implies Q \gg$on affirme la conjonction de l'hypothèse et la négation de la conclusion de l'assertion initiale $\ll P$ et (non Q) $\gg$. On se trompe facilement car le connecteur " $\implies$ " n'apparaît pas dans la négation de l'assertion. D'après le sens même de l'implication, on voit tout de suite que l'assertion "non ($P \implies Q$)" est équivalente à "P et (non Q)"

1.1.6 Équivalence logique

Une équivalence logique est la conjonction d'une implication et de sa réciproque. « $P \iff Q$ »signifie « $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ ».

Les phrases suivantes ont le même sens :
– Les assertions P et Q sont équivalentes ;
– $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$;
– $P \iff Q$;
– P et Q sont simultanément vraies, ou simultanément fausses ;
– (P et Q) ou ((non P) et (non Q)) ;
– pour que P, il faut et il suffit que Q ;
– P est vraie si et seulement si Q est vraie ;
– P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.
Bien entendu, dans toutes ces phrases on peut changer les rôles de P et Q.

1.2 Quantificateurs

Pour exprimer qu'une propriété est universelle ou pour exprimer l'existence d'un objet, les mathématiques disposent de deux signes logiques appelés quantificateurs. Nous allons en étudier les règles d'usage et les propriétés.

1.2.1 Quantificateur universel

Le quantificateur universel $\forall$ se lit : *pour tout* ou *quelque soit*. La phrase formelle $\forall x \in E, P(x)$ affirme que la propriété P est vraie pour tout les éléments de l'ensemble E, qu'il n'y a pas dans E de contre exemple à la propriété P.

L'assertion $\forall x \in E, P(x)$ ne dépend pas de x, elle signifie exactement la même chose que $\forall y \in E, P(y)$. On dit que la variable x est muette.

L'usage de ces quantificateurs est très précis et diffère de l'usage intuitif du langage ordinaire. Cette précision est nécessaire pour que les formules écrites avec des quantificateurs aient un sens précis. C'est pourquoi il est important de prendre conscience des règles d'utilisation de ces quantificateurs.

1.2.2 Quantificateur existentiel

Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit *il existe*. L'assertion $\exists x \in E, P(x)$ veut dire que dans E, il existe au moins un élément x qui vérifie la propriété P.

Attention : il peut aussi en exister plusieurs, on affirme seulement que l'ensemble des éléments qui vérifient la propriété P est non vide.

L'assertion $\exists x \in E, P(x)$ ne dépend pas de x, elle signifie exactement la même chose que $\exists y \in E, P(y)$. La variable x est une variable muette.

La notation $\exists!$ est utilisée pour : *il existe un seul*.

Exemple Si $a \in \mathbb{Z}$, étudions la propriété : « L'équation $2x^2 - (a+2)x + a = 0$ a une solution entière ».

L'équation à deux racines, $x' = 1$ et $x'' = a/2$. Si a est pair elles sont entières toutes les deux, sinon seule la première est entière. La propriété est donc vraie, bien qu'il y ait quelquefois deux solutions entières ; elle doit être comprise comme :

$$\exists x \in \mathbb{Z},\ 2x^2 - (a+2)x + a = 0$$

Souvent on précise quand même : « L'équation $2x^2 - (a+2)x + a = 0$ a au moins une solution entière », mais ce n'est pas obligatoire.

1.2.3 Règles d'usage des quantificateurs

Quand on écrit une phrase formelle avec des symboles logiques, on ne doit pas mélanger les mots et les signes logiques :
- ou bien on écrit des phrases complètes en français (ou en arabe).
- ou bien on écrit des phrases formelles.

En particulier, il est incorrect d'utiliser ces signes comme des abréviations et cela conduit à des erreurs.

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens d'une phrase formelle. Quand on inverse l'ordre de deux quantificateurs différents, le sens change.
- $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$: pour chaque x, il y a un y, fonction de cet x, tel que la propriété P est vérifiée.
- $\exists y \in E, \forall x \in F, P(x, y)$: il y a un y, le même pour tous les x, tel que la propriété P est vérifiée.

Négation d'une phrase avec des quantificateurs Comment prendre la négation d'une phrase formelle écrite avec des quantificateurs ?

non ($\forall x \in E, P(x)$) : Pour nier une propriété P universelle, on affirme l'existence d'un contre-exemple : $\exists x \in E$, (non $P(x)$).

non ($\exists x \in E, P(x)$) : Pour nier une propriété P existentielle, on affirme que sa négation est universelle : $\forall x \in E,$ (non $P(x)$).

Négation d'une phrase comportant plusieurs quantificateurs Il suffit de se souvenir que ces phrases admettent des parenthèses supplémentaires et d'appliquer progressivement les propriétés précédentes, en progressant de la gauche vers la droite. Pour nier une phrase formelle commençant par plusieurs quantificateurs, on conserve l'ordre d'écriture des variables, on change les $\forall$ en $\exists$ et les $\exists$ en $\forall$, puis on remplace la propriété P par sa négation (non P).

Exercices

Exercice 1.1. *Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses :*

1. *Si* $a > 0$ *et* $b > 0$ *alors* $ab > 0$	2. *Si* $ab > 0$ *alors* $a > 0$ *et* $b > 0$
3. *Si* $ab \leqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$	4. *Si* $ab \leqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$
5. *Si* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \leqslant 0$	6. *Si* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \leqslant 0$
7. *Si* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \geqslant 0$	8. *Si* $ab \geqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$
9. *Si* $ab < 0$ *alors* $a > 0$ *ou* $b > 0$	10. *Si* $a > 0$ *ou* $b > 0$ *alors* $ab < 0$

Exercice 1.2. *Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :*

1. *Pour que* ab *soit positif ou nul, il suffit que* a *et* b *soient positifs ou nuls.*
2. *Pour que* ab *soit positif ou nul, il faut que* a *et* b *soient positifs ou nuls.*
3. *Pour que* ab *soit positif ou nul, il suffit que* a *et* b *soient négatifs ou nuls.*
4. *Pour que* ab *soit positif ou nul, il faut que* a *et* b *soient négatifs ou nuls.*

Exercice 1.3. *Donner les contraposées et les réciproques des implications des exercices 1.1 et 1.2*

Exercice 1.4. *Compléter les pointillés par le connecteur logique qui convient parmi :* $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ...... $x = 2$ *;*
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$ *;*
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 1.5. *Soient les quatre assertions suivantes :*

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. *Les assertions* a, b, c, d *sont-elles vraies ou fausses ?*
2. *Donner leur négation.*

Exercice 1.6. *Donner les contraposées et les réciproques des implications données dans l'exercice 1.1. et 1.2.*

Exercice 1.7. *On note P, Q, R, S quatre propositions données.*

1. *Expliciter les tables de vérité des propositions suivantes :*

$$\overline{P},\ P \wedge Q,\ P \vee Q,\ P \implies Q\ ,\ P \iff Q$$
$$P \wedge \overline{P},\ P \vee \overline{P},\ \overline{P \wedge Q},\ \overline{P \vee Q},\ \overline{P \implies Q},\ \overline{P \iff Q}$$

2. *Vérifier que :*

$$P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

3. *Trouver une proposition équivalente à :* $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$.
   Appliquer ce résultat aux propositions P, Q, R, S *pour en déduire une proposition équivalente à :* $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$
   Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ *le système :* $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$

Solutions

Solution 1.1. *Les réponses sont résumées dans le tableau suivant :*

1. Vraie	*2. Fausse*
3. Vraie	*4. Fausse*
5. Fausse	*6. Fausse*
7. Vraie	*8. Fausse*
9. Vraie	*10. Fausse*

Solution 1.2. *Les solutions sont résumées dans le tableau suivant :*

Vraie	*Fausse*
Vraie	*Fausse.*

Solution 1.3.

1. *Si* $ab \leqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$.
   Si $ab > 0$ *alors* $a > 0$ *et* $b > 0$.
2. *Si* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \leqslant 0$.
   Si $a > 0$ *et* $b > 0$ *alors* $ab > 0$
3. *Si* $a > 0$ *et* $b > 0$ *alors* $ab > 0$.
   Si $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \leqslant 0$
4. *Si* $a > 0$ *ou* $b > 0$ *alors* $ab > 0$.
   Si $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \leqslant 0$
5. *Si* $ab > 0$ *alors* $a > 0$ *et* $b > 0$.
   Si $ab \leqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$
6. *Si* $ab > 0$ *alors* $a > 0$ *ou* $b > 0$.
   Si $ab \leqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$.
7. *Si* $ab < 0$ *alors* $a > 0$ *ou* $b > 0$.
   Si $ab \geqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *ou* $b \leqslant 0$
8. *Si* $a > 0$ *ou* $b > 0$ *alors* $ab < 0$.
   Si $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \geqslant 0$
9. *Si* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$ *alors* $ab \geqslant 0$.
   Si $a > 0$ *ou* $b > 0$ *alors* $ab < 0$
10. *Si* $ab \geqslant 0$ *alors* $a \leqslant 0$ *et* $b \leqslant 0$.
    Si $ab < 0$ *alors* $a > 0$ *ou* $b > 0$
11. *Pour que* ab *soit strictement négatif, il faut que* a *ou* b *soit strictement négatif.*
    Pour que ab *soit positif ou nul, il faut que* a *et* b *soient positifs ou nuls.*

12. *Pour que ab soit strictement négatif, il suffit que a ou b soit strictement négatif. Pour que ab soit positif ou nul, il suffit que a et b soient positifs ou nuls.*
13. *Pour que ab soit strictement négatif, il faut que a ou b soit strictement positif. Pour que ab soit positif ou nul, il faut que a et b soient négatifs ou nuls.*
14. *Pour que ab soit strictement négatif, il suffit que a ou b soit strictement positif. Pour que ab soit positif ou nul, il suffit que a et b soient négatifs ou nuls.*

Solution 1.4. *Les connecteurs convenables sont :*

1. $\Leftarrow$
2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Solution 1.5. *Une assertion est vraie si sa négation et fausse.*
- *(a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leqslant 0$.*
- *(b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \leqslant 0$.*
- *(c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$ est fausse, par exemple $x = -1$, $y = 0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x + y \leqslant 0$.*
- *(d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leqslant x$.*