Chap 3 : Eléments d'arithmétique dans l'ensemble des naturels

1. Multiples et diviseurs

1.1 Multiples d'un naturel

Le naturel a est multiple du naturel b signifie qu'il existe un naturel k tel que **a=bxk**.

Si les naturels a et b sont multiples de c alors a+b est aussi multiple de c.

Si les naturels a et b sont multiples de c et que a>b alors a-b est aussi multiple de c.

Si a est multiple de b est si b est multiple de c alors a est multiple de c.

1.2 Diviseurs d'un naturel

Le naturel a est un diviseur du naturel b signifie qu'il existe un naturel k tel que **b = axk**.

Si le naturel c est un diviseur des naturels a et b alors il est aussi diviseur de a+b.

Si le naturel c est un diviseur des naturels a et b et que a>b alors il est aussi diviseur de a-b.

Si a est diviseur de b et si b est diviseur de c alors a est diviseur de c.

2. Division euclidienne

a étant un naturel, b étant un naturel non nul,
il existe toujours 2 naturels uniques q et r tels que a = bq + r et r < b.

q est le quotient euclidien de a par b.
r est le reste de a par b.

3. Nombres premiers

3.1 Définition

Un naturel est dit premier s'il a exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Naturels premiers inférieurs à 100 :
2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ;37 ;41 ;43 ;47 ;53 ;59 ;61 ;67 ;71 ;73 ;79 ;83 ;89 ;97

3.2 Décomposition d'un naturel en produit de facteurs premiers

Pour obtenir la décomposition d'un naturel en facteurs premiers : diviser successivement le nombre proposé par les nombres premiers successifs.

Ex :

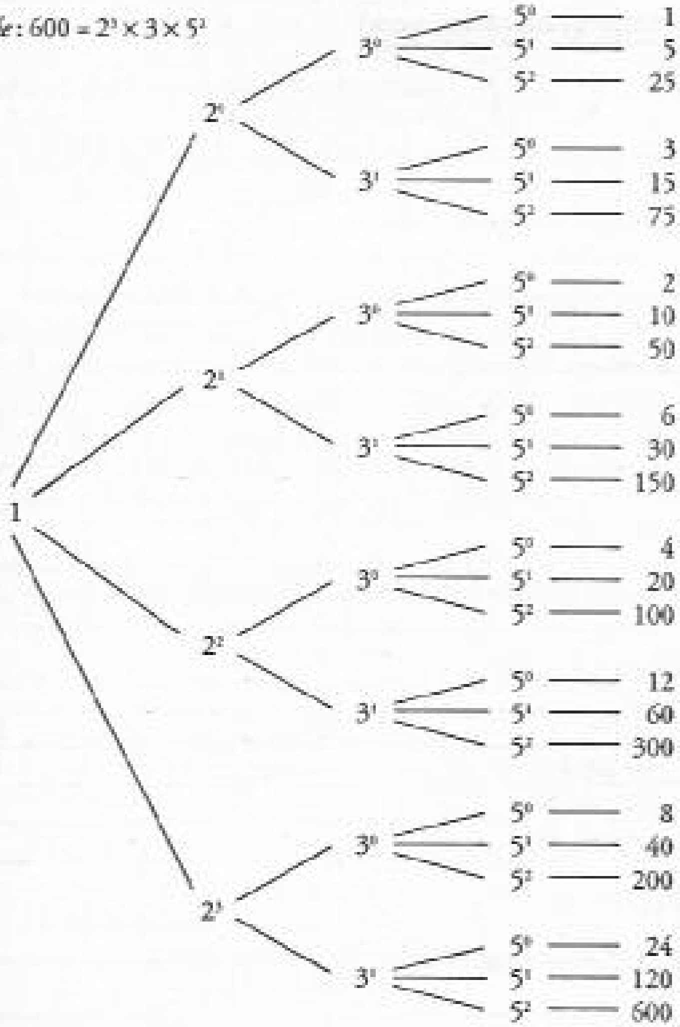
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

3.3 Recherche systématique des diviseurs d'un nombre

À partir de la décomposition en produits de facteurs premiers et de la propriété précédente, il est facile de trouver tous les diviseurs, à l'aide de l'arbre des diviseurs.

Exemple : $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$



3.4 Nombre de diviseurs d'un naturel

Ex pour 600, le nombre de diviseurs est 4x2x3 = 24
(2^3x3x5^2)

4. Plus Grand Commun Diviseur, Plus Petit Commun Multiple

4.1 Diviseurs communs, pgcd

Trois méthodes permettent de déterminer le pgcd de deux naturels :

- Ecrire les listes croissantes des diviseurs de chaque nombre.On peut alors repérer le plus grand nombre commun aux deux listes : c'est leur pgcd.
- Ecrire les décompositions en facteurs premiers des deux nombres.Le pgcd est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent à la fois dans les 2 décompositions, affecté de l'exposant le plus bas avec lequil il figure dans 1 des décompositions.
  Ex : $24 = 2^3x3$
  $36 = 2^2x3^2$
  pgcd $= 2^2x3 = 12$
- Algorithme d'Euclide : pour obtenir le pgcd de a par b, on divise a par b, puis b par le reste de la 1ère division, puis ce dernier reste par le second, etc…Le reste précédent le reste nul est le pgcd.

Deux naturels dont le pgcd est 1 sont dits premiers entre eux.

Les diviseurs communs à a et b sont tous les diviseurs du pgcd de a et b.

Si n est divisible par a et par b et si a et b sont premiers entre eux, n est divisible par ab.

4.2 Multiples communs, ppcm

2 méthodes permettent de déterminer le ppcm de deux naturels :

- Ecrire le début des listes croissantes de multiples de chaque nombre.On peut alors repérer le plus petit nombre commun aux deux listes : c'est leur ppcm.
- Ecrire les décompositions en facteurs premiers des deux nombres.Le ppcm est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des deux décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lequel il figure ds 1 des décompositions.

Les multiples communs à deux naturels a et b sont tous les multiples du ppcm de a et b.

5. Critères de divisibilité

Divisibilité par 2 :
Un naturel est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair.
Un naturel a même reste dans la division par 2 que son chiffre des unités.

Divisibilité par 4 :
Un naturel est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
Un naturel a même reste dans la division par 4 que le nombre formé par ses deux derniers chiffres.

Divisibilité par 10 :
Un naturel est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.
Un naturel a pour reste dans le division par 10 son chiffre des unités.

Divisibilité par 5 :
Un naturel est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
Un naturel a même reste dans la division par 5 que son chiffre des unités.

Divisibilité par 9 :
Un naturel est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Un naturel a même reste dans la division par 9 que la somme de ses chiffres.

Divisibilité par 3 :
Un naturel est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Un naturel a même reste dans la division par 3 que la somme de ses chiffres.