Exercice 1

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :	$e^{in\theta}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2i}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$, alors :	$BC=2AC$	☐Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$	☐Faux ☐ Vrai

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux

On considère le nombre complexe : $Z=-\frac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$.

a. On a : $\lvert Z\rvert=1$.

b. On a : $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

c. Le réel $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de Z.

d. On a : $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

Exercice 3

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $\lvert z\rvert$ désigne le module de z.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z'\overline{z}\right)=0$.

2. Montrer que les points O, *M* et *M'* sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}\left(z'\bar{z}\right)=0$.

Applications

3. *N* est le point d'affixe z^2-1. Quel est l'ensemble des points *M* tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4. On suppose *z* non nul. *P* est le point d' affixe $\frac{1}{z^2}-1$. On recherche l'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que les points O, *N* et *P* soient alignés.

a. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\bar{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$.

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm). Soit *I* le point d'affixe 1. On note Γ le cercle de diamètre [*OI*] et on nomme son centre Ω.

Partie A

On pose $a_o=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle Γ.
2. Soit *B* le point d'affixe *b*, avec $b=-1+2i$, et *B'* le point d'affixe *b'* telle que $b'=a_0b$.

a. Calculer *b'*.

b. Démontrer que le triangle *OBB'* est rectangle en *B'*.

Partie B

Soit *a* un nombre complexe non nul et différent de 1, et *A* son image dans le plan complexe. A tout point *M* d'affixe *z* non nulle, on associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que $z'=az$.

On se propose de déterminer l'ensemble des points *A* tels que le triangle *OMM'* soit rectangle en *M'*.

1. Interpréter géométriquement $\arg(\frac{a-1}{a})$.

2. Montrer que $(\overrightarrow{M'O}\,;\overrightarrow{M'M})=\arg(\frac{a-1}{a})+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$).

3. En déduire que le triangle *OMM'* est rectangle en *M'* si et seulement si *A* appartient au cercle Γ privé de *O* et *I*.

Exercice 5

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm. On pose $z_0=2$ et, pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel. Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier *n*, on pose $u_n=|z_n|$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel *n*, $u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre *O* et de rayon 0,1 ?

4. a. Etablir que, pour tout entier naturel *n*, $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$. En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b. Pour tout entier naturel n, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$ .On a ainsi $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$. Exprimer l_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (l_n) ?

Exercice 6

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Partie A

1. a. Donner la forme exponentielle de z_B puis de z_C .

b. Placer les points A, B, et C.

2. Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3. Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

A tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \dfrac{-4}{z-2}$.

b. En déduire les points associés aux points B et C.

c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2. a. Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2, $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

b. On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Δ, où Δ est l'ensemble défini à la question 3. de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Exercice 7

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. *On note* I, A, B, C, D *les points du plan complexe d'affixes* 1, a, a^2, a^3, a^4.

1. Vérifier que $a^5 = 1$.

2. Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$.

3. Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$.

4. En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$.

5. Montrer que $a^3 = \overline{a}^2$ et que $a^4 = \overline{a}$.

6. En déduire que $(a+\overline{a})^2 + (a+\overline{a}) - 1 = 0$.

7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

8. Calculer $(a+\overline{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

9. Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm).

Exercice 8

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Dans tout l'exercice, $P \backslash O$ désigne le plan P privé du point origine O.

1. Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

– Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

– Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a. Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b. Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2. On considère l'application f de $P \setminus O$ dans $P \setminus O$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a. Démontrer que pour $z' \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif. En déduire que, pour tout point M de $P \setminus O$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b. Déterminer l'ensemble des points M de $P \setminus O$ tels que $f(M) = M$.

c. M est un point du plan P distinct de O, U et V, on admet que M' est aussi distinct de O, U et V.

Établir l'égalité : $\dfrac{z'-1}{z'-i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+i}\right) = -i\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)$.

3. a. Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre réel non nul.

b. Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

Exercice 9

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et –1. Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et –1, on a : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$.

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\dfrac{MB}{MA}$ puis une expression de l'angle $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right)$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$.

4. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.
5. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

a. Montrer que si le point M appartient à Γ alors le point M' appartient à la droite (AB).

b. Tout point de la droite (AB) a-t-il un antécédent par f ?

(*La fonction f est appelée fonction de Joukowski et est utilisée en aéronautique pour étudier des profils d'aile*).