# Généralités sur les fonctions

## I) Pour démarrer :

### Notion de fonction et ensemble de définition :

### Définition :

- *Soit E une partie de IR et f une relation de E dans IR . Lorsque tout élément x de E à au plus une image par f (à 0 ou 1 image par f) on dit que f une fonction de E vers IR*
  *on note.* $f : E \rightarrow IR$
  $x \mapsto f(x)$
- *L'ensemble Df des réel x tel que f(x) existe est appelé ensemble de définition de la fonction f on dira alors f est définie sur Df*

**Activité 1** : **Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes**

0) $f : IR \rightarrow IR$, $x \mapsto 3x^2 + x - 3$ ; 2) $g : IR \rightarrow IR$, $x \mapsto \sqrt{3x-1}$ ; 3) $h : IR \rightarrow IR$, $x \mapsto \dfrac{3x}{2x-1}$

4) $f_1 : [1, +\infty[ \rightarrow IR$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3}$ ; 5) $k : IR \rightarrow IR$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$

## II) Représentation graphique d'une fonction :

### Définition :

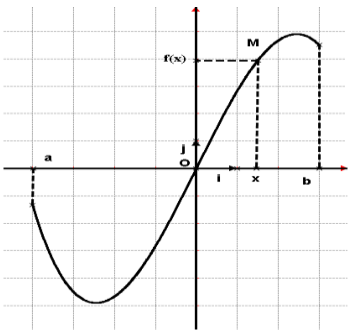
- *Le plan est muni d'un repère $\mathcal{R}(o, \vec{i}, \vec{j})$.*

*Soit f est une fonction définie sur E ( E $\subset$ IR ) . On appelle représentation graphique de f ,ou courbe représentative de f , l'ensemble des points M de coordonnées (x ,f(x)), ou x $\in$ E*

- *Si $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative d'une fonction f , alors*
  $\mathcal{C}$ *={M (x ,f(x)) avec x un élément de E }*

*On dit que y=f(x) est l'équation de la courbe* $\mathcal{C}$

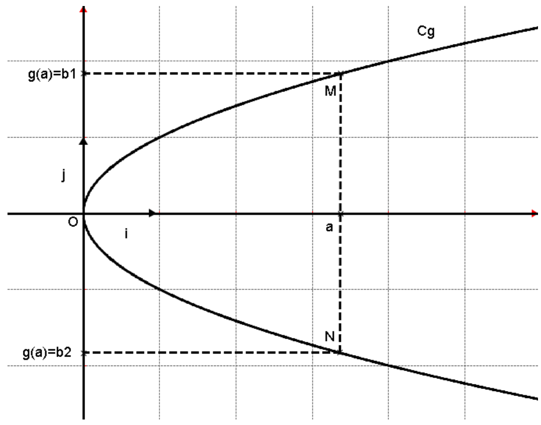
**Exemple :**




**f est une fonction définie sur E = [a b]**

**M(x ,y) appartient à ( $\mathcal{C}$) equivaut à** $\begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases}$

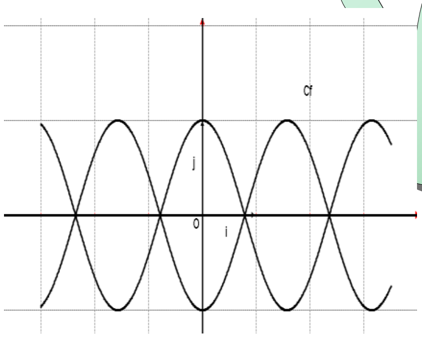
## Remarque :



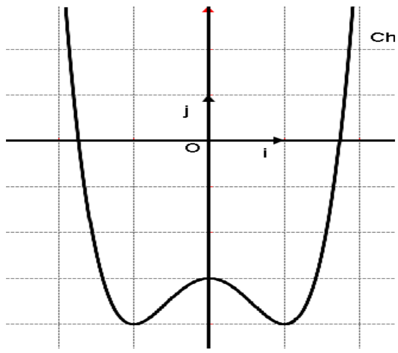

- ( 𝒞g) : Cette courbe ne représente pas une fonction car le réel a possède plus qu'une image par g .
- $\begin{cases} g(a) = b_1 \\ g(a) = b_2 \end{cases}$ et $b_1 \neq b_2$ donc (Cg) ne représente pas une fonction

**Activité 2** : ***Parmi les courbes ci-dessous, indiquer celle qui représentent une fonction.***

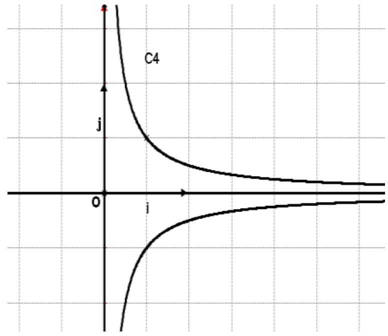
***1)***




***2)***

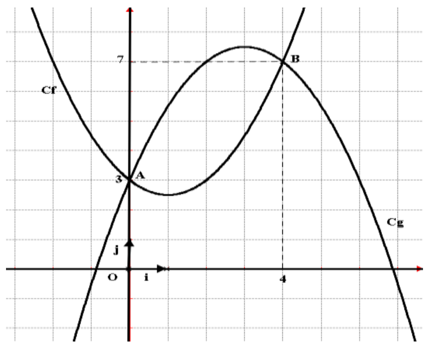



***3)***




## III) Positions de deux courbes :

***fig1***



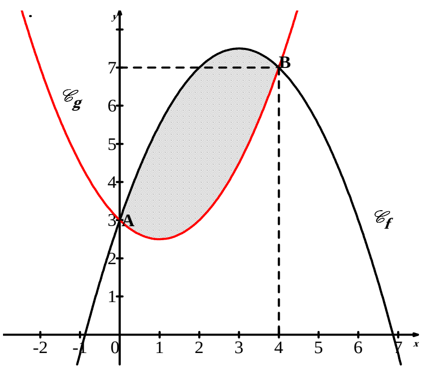

***Ci –contre( 𝒞f) et ( 𝒞g) , les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur IR***

***1) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x), c'est lire sur le graphique les abscisses des points d'intersection de la courbe ( 𝒞f) et la courbe ( 𝒞g)  (voir fig 1)***

- ***( 𝒞f) ∩ ( 𝒞g) = {A (0, 3), B (4, 7)} donc***

***f (x) =g(x)  signifie x= 0 ou x= 4 , d'où*** $S_{IR} = \{0\ ,4\}$

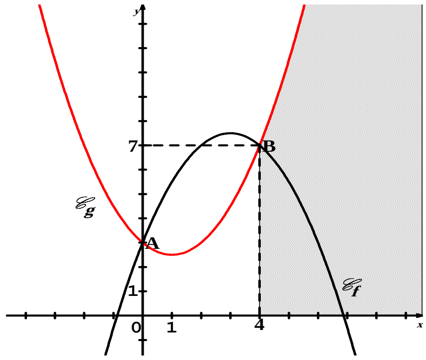
***fig2***




***2) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) > g(x), c'est lire sur le graphique les abscisses des points de la courbe ( 𝒞f) qui sont au dessus de la courbe ( 𝒞g)  (voir fig 2)***

- ***Les solutions de l'inéquation f(x) > g(x), sont les abscisses des points de la courbe ( 𝒞f) situés au dessus de la courbe ( 𝒞g) , d'où*** $S_{IR} = \left]\, 0\ ,\ 4 \,\right[$

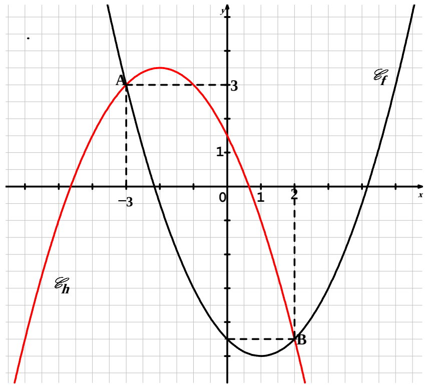
*fig3*




3) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) < g(x), c'est lire sur le graphique les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) qui sont au dessous de la courbe ( $\mathscr{C}$g) (voir fig3) .

❖ Les solutions de l'inéquation f(x) < g(x), sont les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) situés au dessous de la courbe ( $\mathscr{C}$g), d'où $S_{IR} = ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[$

## *Activité 3*:




Ci –contre( $\mathscr{C}$f) et ( $\mathscr{C}$h) , les courbes représentatives de deux fonctions f et h définies sur IR

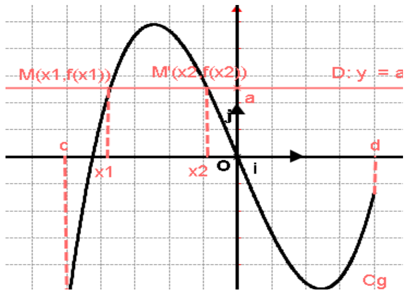
1) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = h(x) .

2) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) < h(x) .

3) Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) > h(x)

## *IV) Positions d 'une courbe et d ' une droite*

*fig1*




f est une fonction définie sur l'intervalle [c d] et ( $\mathscr{C}$f) la courbe représentative de f

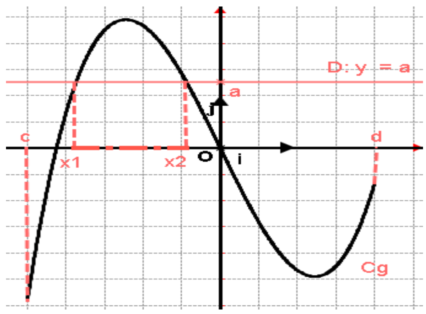
**1)** Résoudre graphiquement l'équation f(x) = a , c'est lire sur le graphique les abscisses des points d'intersection de la courbe ( $\mathscr{C}$f) et la droite D d'équation y = a (voir fig 1)

❖ $f(x_1) = f(x_2) = a$

❖ $x_1$ et $x_2$ sont les antécédents de a

❖ ( $\mathscr{C}$f) ∩ D = {M ( $x_1$, f ( $x_1$)), M' ( $x_2$, f ( $x_2$)} donc f (x) = a signifie x= $x_1$ ou x= $x_2$ , d'où $S_{IR} = \{x_1, x_2\}$

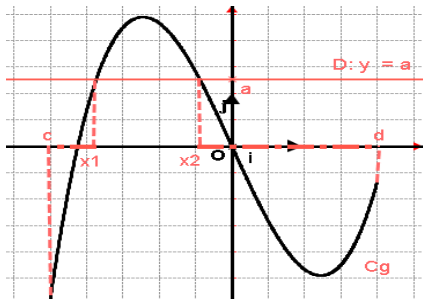
*fig2*




**2)** Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) > a , c'est lire sur le graphique les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) qui sont au dessus de la droite D d'équation y = a (voir fig 2)

❖ Les solutions de l'inéquation f(x) > a sont les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) situés au dessus de la droite D : y = a, d'où $S_{IR} = ]x_1 , x_2[$

*fig 3*




**3)** Résoudre graphiquement l'inéquation f(x) < a , c'est lire sur le graphique les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) qui sont au dessous de la droite D d'équation y = a (voir fig 3)

❖ Les solutions de l'inéquation f(x) < a sont les abscisses des points de la courbe ( $\mathscr{C}$f) situés au dessous de la droite D : y = a, d'où $S_{IR} = [c, x_1[ \cup ]x_2, d]$

## *Activité 4*:

**Ci –contre( $\mathscr{C}$f) , la courbe représentative d'une fonction f <u>définies sur IR</u>**

**1) Lire sur le graphique**

**a) L'image de 0 par f.**

**b) Les antécédents de – 3 .**

**2) Résoudre graphiquement l'équation**

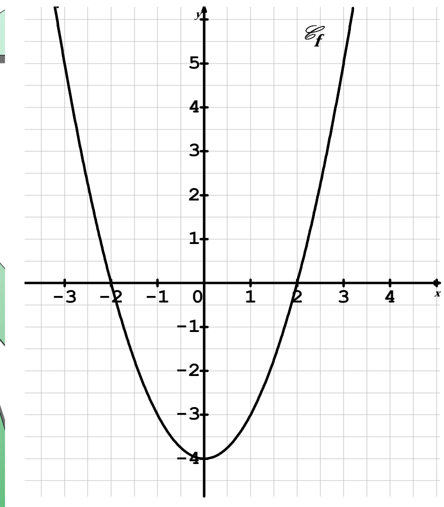
**a) f(x) = 0**

**b) f(x) = 5**

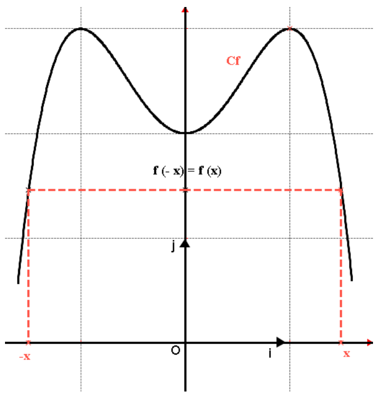
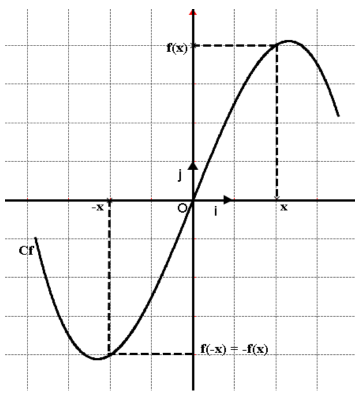
**3) Résoudre graphiquement l'inéquation**

**a) f(x) < 0 ; b) f(x) > 0**

**c) f(x) > 5 ; d) f(x) < 5**




## *V) Fonctions : parité*

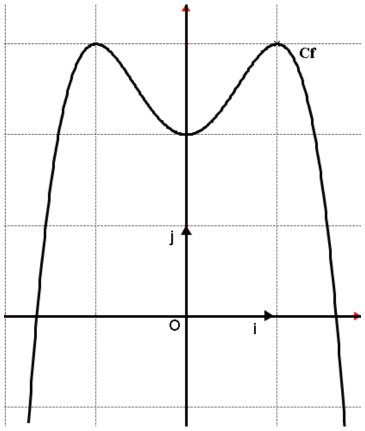
<table>
<tr><th>Définition</th><th>Interprétation graphique</th><th>Conséquence</th></tr>
<tr><td>Soit f une fonction définie sur D f et ( $\mathscr{C}$f) sa courbe représentative dans un repère $\mathscr{R}(o\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.<br>❖ On dit que f est paire si, pour tout réel x de D f $\begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$<br>❖ $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$<br>f est définie sur IR<br>$\begin{cases} x \in IR \text{ et } -x \in IR \\ f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 2 = f(x) \end{cases}$<br><br>Donc f est une fonction paire</td><td>
</td><td>❖ Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées</td></tr>
<tr><td>❖ On dit que f est impaire si, pour tout réel x de D f<br>$\begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$<br>❖ $f(x) = \frac{8}{3}x - \frac{1}{6}x^3$<br>f est définie sur IR<br>$\begin{cases} x \in IR \text{ et } -x \in IR \\ f(-x) = \frac{8}{3}(-x) - \frac{1}{3}(-x)^3 \\ \qquad = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3}x^3 = -f(x) \end{cases}$<br><br>Donc f est une fonction impaire</td><td>
</td><td>❖ Une fonction est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère</td></tr>
</table>

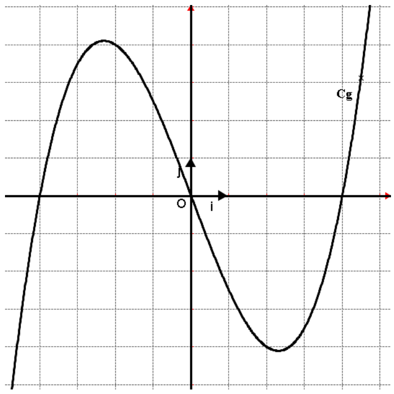
**Activité 5:** ***Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes puis dire si la fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire .***

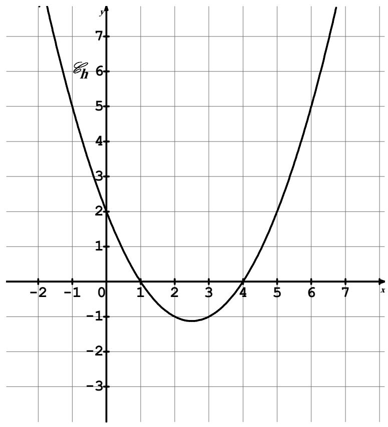
***1)*** $f : IR \rightarrow IR$ ; ***2)*** $g : IR \rightarrow IR$ ; ***3)*** $h : IR \rightarrow IR$ ; ***4)*** $k : IR \rightarrow IR$

$x \mapsto x^4 - 2x^2 + 3$ ; $x \mapsto x + \dfrac{1}{x^2}$ ; $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 2}$ ; $x \mapsto \sqrt{3 - x^2}$

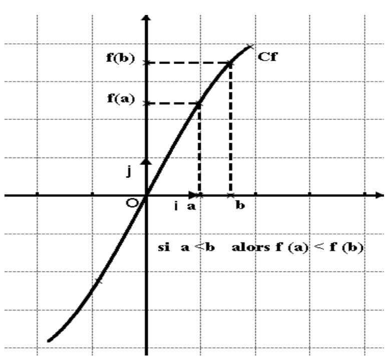
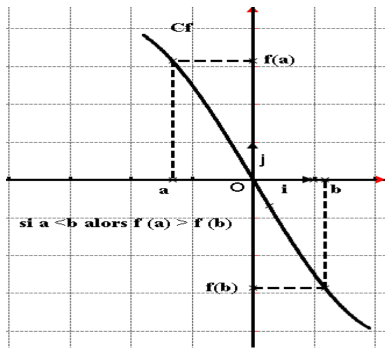
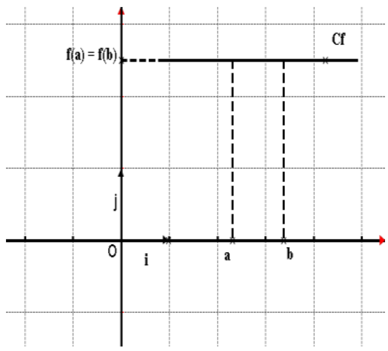
**Activité 6 :** ***Le plan est muni d'un repère orthogonale*** $(o, \vec{i}, \vec{j})$. ***Les courbes*** $C_1$, $C_2$, ***et*** $C_3$ ***représentent respectivement trois fonctions f, g, et h.A l'aide des graphiques déterminer la parité de f,g et h ( si elle est paire , impaire ou ni paire ni impaire)***



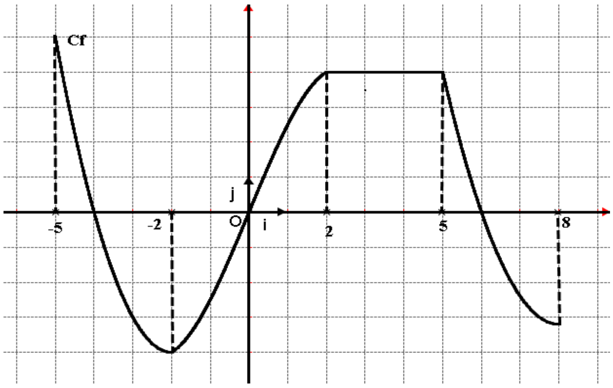




## VI) Sens de variations d'une Fonction :

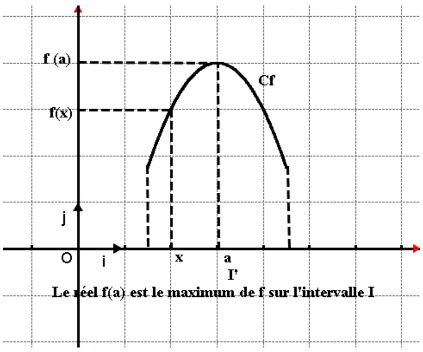
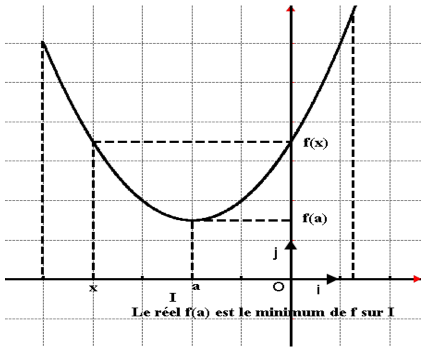
| ***Définition1*** | ***Définition2*** | ***Définition 3*** |
| --- | --- | --- |
| ❖ ***Soit f une fonction définie sur un ensemble Df.La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle*** $I \subset Df$ ***si, pour tous réels a et b de I tel que*** $a<b$, ***on a*** $f(a) < f(b)$ | ❖ ***Soit f une fonction définie sur un ensemble Df . La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle*** $I \subset Df$ ***si, pour tous réels a et b de I tel que*** $a<b$, ***on a*** $f(a) > f(b)$ | ❖ ***Soit f une fonction définie sur un ensemble Df . La fonction f est constante sur l'intervalle*** $I \subset Df$ ***si, pour tous réels a et b de I , on a*** $f(a) = f(b)$ |
| ***Interprétation graphique*** | ***Interprétation graphiqu*** | ***Interprétation graphique*** |
|   |   |   |

## Activité 7 :

*La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-5 ,8].*
*Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur cet intervalle.*




# VII) Extremums d'une Fonction :

| *Définition1* | *Définition2* |
|---|---|
| ❖ *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et a ∈ I .La fonction f présente un maximum en a si et seulement si, pour tout x ∈ I , f(x) ≤ f(a)*<br>❖ *Le réel f(a) est le maximum de f sur I* | ❖ *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et a ∈ I .La fonction f présente un minimum en a si et seulement si, pour tout x ∈ I , f(x) ≥ f(a)*<br>❖ *Le réel f(a) est le minimum de f sur I* |
| *Interprétation graphique* | *Interprétation graphique* |
|  |  |



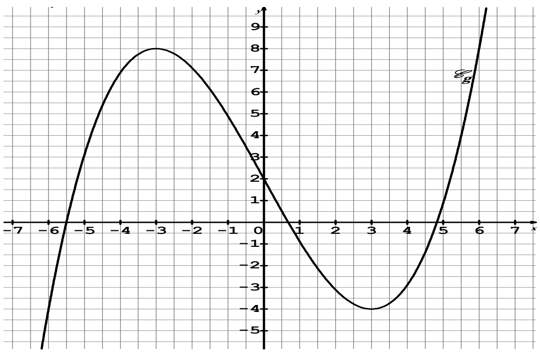


## Remarques :

❖ *Une fonction est dite monotone sur un intervalle I , si elle est croissante ou décroissante sur I .*
❖ *Lorsque f admet un maximum ou un minimum en a on dit que f admet un extremum en a .*

## Activité 8 :

**La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur IR .**
**1) Indiquer par lecture graphique le maximum M et le minimum m de f sur l'intervalle [-5 ,5].**
**2) A-t-on pour tout $x \in$ IR , f ( x) ≤ M ?**
**3) A-t-on pour tout $x \in$ IR , f ( x) ≥ m ?**



N*MY