Équipe des Conseillers Pédagogiques
de la Sarthe

CONSTRUIRE LES DÉCIMAUX AU CM1

0,5

1/2

$\sqrt{0,25}$

1997-1999

Présentation

Ce document est le fruit du travail de l'équipe des conseillers pédagogiques de la Sarthe qui sont partis des constats suivants :

- La construction des décimaux au CM1 est une tâche difficile.
- Les dernières Instructions officielles imposent un cadre strict de construction (partir de la fraction mesure, ne pas s'appuyer sur la fraction quotient).
- les méthodes utilisées dans les classes s'écartent plus ou moins des Instructions Officielles et s'appuient encore trop souvent sur le nombre à virgule et le changement d'unité.

Même si la partie "Mise en œuvre" décrit dans le détail toutes les étapes du travail avec les élèves, ce document n'est pas un outil "clé en main" qu'il suffirait de suivre page après page. Il nécessite une bonne maîtrise du décimal et des connaissances à construire à l'école primaire ainsi qu'une réflexion de l'enseignant sur la mise en œuvre d'une démarche active plaçant l'élève au cœur des apprentissages. Il nous paraît donc hautement souhaitable que ce document soit d'abord présenté aux maîtres de cycle 3 lors de journées pédagogiques.

SUPPORT THÉORIQUE

- Deux grands choix s'offrent aux maîtres de CM1 pour construire les décimaux :
    - donner d'abord du sens au nombre décimal à l'aide de l'intercalation et du fractionnement de l'unité avant de s'intéresser à son usage social.
    - rester dans le domaine du "concret" en s'appuyant sur le nombre à virgule qu'utilisent déjà les élèves (cm, mm par exemple) et le changement d'écriture.
- Même si elle s'avère plus difficile, c'est la première solution que nous avons retenue et pour laquelle nous avons construit les outils de mise en œuvre développés ci-dessous. La deuxième solution, apparemment plus sécurisante, risque de conduire les élèves à l'opposé du but visé par l'enseignant car elle revient, comme nous le verrons plus loin, à nier l'existence du nombre décimal.

Les enjeux

- *C'est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux*[1]. Même si, *la maîtrise des nombres décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire*[2], on peut penser que la trace indélébile laissée par la première approche constituera la base de toutes les difficultés ou réussites futures. Les résultats des recherches de J. Bolon[3] nous confortent dans cette idée. Voici la question qu'elle a posée à des élèves de CM1, CM2, 6e et 5e :

Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 *?*

Les pourcentages de réussite ont été les suivants :

Classe	CM1	CM2	6^{e}	5^{e}
Réussite	22 %	30 %	27 %	29 %

- La plupart des élèves qui n'ont pas réussi attachent sans doute plus d'importance à l'écriture (le costume) du nombre qu'à sa signification (globalité du nombre, fractionnement de l'unité, valeur portée par chaque chiffre) et perçoivent le nombre décimal comme une juxtaposition de nombres entiers. La tentation est alors forte de transposer sur les décimaux ce qui "marche" avec les entiers. Ainsi, pour répondre à la question ci-dessus, on risque de tenir le raisonnement suivant :

    - de 6,9 à 7 il y a 1 et de 7 à 7,08, il y a 8,
    - 1 < 8 donc 6,9 est plus proche de 7 que 7,08.

- La faible augmentation des pourcentages de réussite du CM1 à la 5e montre bien que les nombreux retours sur les décimaux effectués en CM2, 6è et 5è modifient peu la représentation première des élèves.

1 : livre du maître du manuel "J'apprends les maths niveau CM1" des éditions Retz
2 : Note de service n° 96-279 du 29 - 11 - 1996. B.O. n° 44 du 05 - 12 - 1996
3 : Bolon, J, *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*, thèse de Sciences de l'éducation, université Paris-5-Sorbonne, 1996.

Quelles représentations a-t-on des décimaux ?

Voici quelques propositions destinées à faire réfléchir le lecteur :

1. Entre 17 et 18, on ne peut écrire aucun nombre
2. Le produit de 2 nombres est toujours supérieur à chaque facteur du produit
3. Multiplier un nombre par 10, 100, 1000, c'est écrire 0, 00, 000 à la droite du nombre
4. Plus l'écriture d'un nombre est longue, plus sa valeur est grande
5. Il n'existe pas de nombre entre 0 et 1
6. Un nombre décimal est le résultat du "collage" de 2 entiers
7. Un décimal est un entier dans lequel on change d'unité (3,25 m c'est 325 cm)
8. Un nombre entier est un nombre décimal
9. Entre 17,25 et 17,26 on peut écrire une infinité de nombres
10. Pour comparer deux décimaux, on complète la partie décimale avec des zéros jusqu'à ce que les deux nombres aient autant de chiffres derrière la virgule.

Aucune de ces propositions ne peut être infirmée ou confirmée car toutes souffrent d'un manque de précision quant au domaine d'application mais elles révèlent quatre ruptures :

Rupture entre le domaine des "entiers stricts" que l'on construit depuis le cycle 1 et celui des décimaux :

- Les propositions 1, 2, 3, 4, 5 sont vraies appliquées aux entiers mais fausses dès que l'on travaille dans l'ensemble des décimaux.
- La proposition 1 doit nous faire réfléchir sur un exercice couramment pratiqué dès le CP : Écrire le nombre qui vient juste avant (ou juste après) : Cet exercice qui n'a de sens que dans l'ensemble des entiers est en contradiction forte avec l'intercalation à l'infini que l'on développera dans la construction des décimaux.

Rupture entre le "nombre à virgule" et le nombre décimal :

- Les propositions 6 et 7 renvoient bien l'image du "nombre à virgule", c'est à dire l'écriture facilitante de la juxtaposition de 2 mesures exprimées l'une en unités, l'autre en sous-unités. 2 m et 25 cm deviennent par une astuce d'écriture 2,25 m sans qu'il soit nécessaire de savoir que le cm c'est 1/100$^{\text{è}}$ de mètre. Le "nombre à virgule" n'est donc qu'un costume qui habille tantôt un nombre décimal, tantôt la simple juxtaposition de 2 entiers.

Rupture entre la définition mathématique et l'usage social du décimal :

- L'usage oppose traditionnellement mesure "exacte" exprimée par un nombre entier et mesure "non exacte" dont l'écriture fait appel à des sous-unités dans un système codifié (système métrique par exemple). Il sera alors difficile d'accepter la proposition 8.
- La proposition 9, élément de la définition mathématique du décimal devient discutable dès que l'on revient à l'usage social : par exemple quel nombre significatif intercaler entre 17,25 et 17,26 s'il s'agit de francs ?

Rupture entre construire le nombre décimal et enseigner des techniques pour réussir une opération :

- La proposition 10 constitue apparemment une bonne technique pour comparer deux décimaux, mais permet-elle de donner du sens au décimal ? On peut en douter puisqu'elle renforce l'idée fausse qu'un décimal est constitué de 2 entiers juxtaposés. Par exemple, pour comparer 1,205 et 1,25 avec cette technique :
    - on écrit un zéro à la suite de 1,25. On obtient 1,250
    - on doit comparer 1,250 et 1,205.
    - pour cela, il suffit de comparer 250 et 205 (on compare deux entiers)

Qu'est-ce qu'un décimal ?

1) Des décimaux pour quoi faire ?

- À l'école primaire, on ne peut parler de nombres sans évoquer leur construction initiale. Les décimaux comme les entiers constituent la réponse à un besoin : **exprimer et communiquer la mesure d'une collection c'est à dire répondre à la question "combien d'unités y a-t-il dans cette collection ?"**

La mesure de grandeurs continues effectuée avec les seules unités entières étant trop imprécise, les égyptiens ont créé la fraction mesure en partageant l'unité en parts égales (d'abord en 2, 4, 8, 16 etc. puis en 10, 100, 1000 etc.).

L'écriture correspondante était de la forme : 3u + 1/2 + 1/4 + 3/8
ou 2u + 1/10 + 2/100.

Cette écriture, parfaitement significative puisque le fractionnement de l'unité est explicite, est restée affaire de spécialistes pendant des siècles à cause de la lourdeur des techniques de calcul ou de comparaison des fractions. Au début du 17è siècle, le mathématicien flamand Simon Stévin (dit Simon de Bruges 1548 - 1620) a inventé l'écriture à virgule que nous connaissons.

- Le nombre décimal permet d'approcher aussi près que possible des nombres comme 1/7, $\sqrt{2}$, ou Π. Exemple :

$$3 < \Pi < 4$$
$$3{,}1 < \Pi < 3{,}2$$
$$3{,}14 < \Pi < 3{,}15$$
$$3{,}141 < \Pi < 3{,}142$$
$$3{,}1415 < \Pi < 3{,}1416 \quad \text{etc.}$$

- Enfin, pour comparer 5/7 et 7/9, il est plus facile de passer par des valeurs approchées : 0,71< 5/7 <0,72 alors que 0,77 < 7/9 <0,78. La simple lecture de l'encadrement nous indique que 5/7 < 7/9.

2) Les costumes du nombre décimal

	écriture sociale	écriture mathématique
Nombre décimal	2,50m ; 36 douz d'œufs ; 4F30 ; 7,5% d'intérêt ; cinquante huit millions d'h.	42 ; 450/100 ; 456,13 ; (58+32) ; 7/1000 ; 10^4 ; 17 ; 35/112 ; $(5X10^3 + 3X10 + 9)$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{25/100}$; (3 + 2/10 + 7/100)
Nombre non décimal	2/3 du champ ;	4/7 ; 11/45 ; Π ; $\sqrt{2}$;

Le classement fait émerger quelques points qu'il est nécessaire de clarifier :
- les images sociales et les images mathématiques des nombres
- la diversité des écritures mathématiques
- pourquoi toutes les fractions ne sont-elles pas des décimaux ?

3) D**éfinition**

- la définition sociale des décimaux :

  - Ce sont surtout les aspects "nombre à virgule" et usage du nombre dans un système structuré d'unités et sous-unités (système métrique par exemple) qui ressortent de cette définition. Elle renvoie au changement d'unité (1,624 m c'est 1624 mm) et au "collage" de 2 entiers (1,624 m c'est 1 m et 624 mm).
  - Cette conception paraît facilitante et rassurante : une seule écriture, un seul usage (la mesure), des règles de rangement et de calcul proches de celle des entiers car l'écriture est calibrée (on compare des mesures exprimées dans les même unités) mais elle ne devra en aucun cas servir de point de départ à la construction du nombre décimal.

- La définition mathématique :

  Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient décimal ($x \div 10^n$). C'est donc une fraction particulière. Cette définition met en évidence :

  - l'unicité du nombre : 4,25 c'est un seul nombre. On évitera donc de parler trop tôt de partie entière et de partie décimale.
  - l'identité du nombre décimal avec un quotient décimal : $4{,}25 = 425 \div 100$
  - le fractionnement de l'unité en dixièmes, centièmes, millièmes puisque, calculer le quotient décimal c'est :
    - répartir les unités,
    - partager le reste en 10 et répartir les dixièmes
    - recommencer partage du reste en dix et répartition.
  - le nombre fini de chiffres dans la partie décimale (la division "s'arrête").

4) Reconnaître un décimal dans ses différentes écritures :

- Toute écriture a,b (a virgule b), sans nom d'unité explicite, où a et b sont des entiers est un nombre décimal.

Attention : un nombre décimal utilisé comme valeur approchée d'une fraction ne donne pas à cette fraction le statut de nombre décimal (dire que 0,33 est une valeur approchée de 1/3 ne signifie pas que 1/3 soit un nombre décimal).

- Un entier est un décimal car il peut toujours s'écrire sous forme d'une fraction décimale.
- Une fraction est un nombre décimal si le quotient du numérateur par le dénominateur est constitué d'un nombre fini de chiffres (le reste est égal à 0). Par contre, 4/7 n'est pas un décimal puisque le quotient de 4 par 7 donne 0,571428|571428|571428... Le reste ne sera jamais égal à 0.

On peut également vérifier, après avoir simplifié la fraction, que le dénominateur est un diviseur de 10^n c'est à dire qu'on peut le décomposer en facteurs premiers tous égaux à 2 ou à 5 (qui sont les seuls diviseurs de 10).

Quelle construction du décimal au CM1 ?

1) Des pratiques antérieures :

- Avant les instructions de 1970, le travail sur les décimaux portait essentiellement sur l'acquisition de techniques de calcul. La référence au concret étant très forte les nombres à virgule présents dans les problèmes dits "de la vie courante", étaient tout désignés pour servir de support à la construction de ces connaissances.
- À partir de 1970, les instructions introduisent, comme une nouveauté, l'idée de changement d'unité : *325 u devient 3,25 si on l'écrit en centaines.* Mais cette conception était déjà contenue dans le nombre à virgule : 3,25m c'est 325 cm.
- Plus tard, la fraction quotient sera utilisée par de nombreux manuels pour introduire les décimaux. Le démarrage est intéressant (10 ÷ 10 = 1; 20 ÷ 10 = 2 ; que peut-on dire du quotient de 17 par 10 ? S'il existe, sa valeur est comprise entre 1 et 2), mais cette construction est très abstraite et l'équivalence entre fractionnement du tout (fraction quotient) et fractionnement de l'unité (fraction mesure) est loin d'être évidente. Un élève de CM1 devrait alors concevoir que le quotient décimal de 7 par 10 est égal au produit de 7 par 1/10.

2) Construire les décimaux à partir des nombres à virgule.

- Cette solution est tentante, voire rassurante car :
    - Les élèves emploient les nombres à virgule dans la vie courante (avec les francs et les centimes, les cm et les mm)
    - On s'appuie sur du "concret"
    - Rangement et calcul sur les décimaux feraient fortement référence au "vécu" et se limiteraient à modifier légèrement les règles déjà connues de rangement et de calcul sur les entiers.
- Mais une telle entrée conduit à nier l'existence même des décimaux :
    - Par un changement d'unité on peut leur redonner un aspect de nombre entier :
      3,25 m = 325 cm.
    - Une mesure écrite avec un nombre à virgule résulte du "collage" de 2 entiers :
      3,45 m c'est 3 m et 45 cm.
    - le sens de dixième, centième, millième etc. n'a pas besoin d'être connu puisque l'usage social les traite comme des sous-unités ayant leur existence propre : on peut mesurer et effectuer les calculs sans savoir qu'un cm c'est 1/100^{e} de mètre.
    - le système n'a pas de stabilité propre puisque selon la grandeur à mesurer, l'existence de certaines sous-unités est niée :
      5,25 F c'est 5 F et 25 centièmes de F. Le dixième de F n'existe pas. De même dans 5,65 m² le 6 n'a d'existence reconnue que dans 65 dm².
    - la règle de l'intercalation à l'infini est remise en cause :
      au-delà du millième, on n'utilise plus guère de décimales. Et encore, à part le millième de mètre des professionnels (plutôt reconnu par les élèves sur la règle graduée comme le dixième de cm) quels millièmes utilise-t-on ?
    - Un entier n'est pas un décimal :
      2m c'est une longueur "exacte". 2,25m ce n'est pas une longueur exacte puisqu'on fait appel à des sous-unités.
    - le nombre décimal n'a pas de stabilité propre :
      selon la situation, une même écriture peut exprimer 2 valeurs différentes :
      12,475m est compris sans ambiguïté comme 12m et 475mm. 12,475F représente 12F et 475 sous-unités du F. Comment interpréter cette notion de sous-unité du franc ? Comme

le millième de franc reconnu par les comptables ou comme la seule sous-unité connue le centime ? dans ce cas, 12,475F = 12F et 475c c'est à dire 16,75F.

3) Une construction mathématique des décimaux.

- Les programmes de 1995 complétés par la circulaire 96-279 citée plus haut ainsi que les résultats des différentes recherches nous conduisent à proposer une méthode de construction qui vise les objectifs suivants :

  - mettre en évidence la nécessité de disposer de nombres plus précis que les entiers pour mesurer des grandeurs continues.
  - construire le nombre décimal en cohérence avec le nombre entier (la numération décimale est un prolongement de la numération entière dans le système de numération de position).
  - donner du sens aux dixièmes, centièmes, millièmes etc. en construisant d'abord les fractions mesure (fractionnement de l'unité). On exclura à ce stade toute référence à un "codage de points sur une droite", pratique qui ne renvoie pas explicitement à la mesure d'une quantité. La fraction quotient, comme nous l'indique la circulaire 96-279, ne sera étudiée qu'au collège.
  - faire percevoir la globalité du nombre décimal en s'interdisant de parler de "partie entière" et de "partie décimale"

Le choix d'une démarche résolument active

- L'élève sera acteur de la construction de ses connaissances. On utilisera donc largement :
  - les situations de recherche travaillées en petits groupes
  - les échanges à l'intérieur du petit groupe avec production d'une trace écrite commune
  - la communication (explicitation, argumentation) au groupe classe
  - l'évaluation formative des connaissances construites.

- 2 types de séances :
  - les plus nombreuses : séances de construction de connaissances (recherche, mise en commun, synthèse).
  - quelques séances palier non décrites ci-dessous laissées à l'initiative des maîtres qui rencontreraient le besoin de faire le point ou de revenir sur une connaissance particulière.

- déroulement d'une séance de construction de connaissances :
  - rappel par les élèves du problème global posé à la classe, de ce qui a été fait au cours de la séance précédente et de ce que l'on sait faire.
  - recherche en petits groupes avec production d'une trace écrite du groupe. Gérer raisonnablement ce temps (20 à 30 min.)
  - mise en commun : chaque groupe présente son travail à la classe. L'enseignant organise le discours mais ne valide pas prématurément. Les différences, les erreurs sont renvoyées au groupe classe. Les élèves sont invités à décrire, argumenter, vérifier, justifier. On développe une attitude critique.
  - synthèse : le maître organise la structuration et apporte les compléments de connaissance en particulier le vocabulaire et les normes d'écriture.

Les connaissances préalables :

- Reconnaître la longueur d'un objet
- Mesurer des longueurs avec différentes unités (autre que dm, cm, mm) c'est à dire :
  - Maîtriser le geste et l'outil (la bande unité, les marques de report)
  - Percevoir clairement que mesurer c'est :
    - choisir une unité
    - reporter cette unité
    - exprimer le résultat à l'aide de nombres.
  - Exprimer la mesure à l'aide d'approximations :
    - environ, à peu près
    - par encadrement avec des entiers.
    - si possible employer les signes > et < (si les élèves ne maîtrisent pas cette écriture, seul l'enseignant l'utilisera)
  - Utiliser le zéro :
    - pour exprimer l'absence d'unité
    - pour écrire un chiffre à sa place (2u et 3 centièmes s'écrira 2,03).

Mise en œuvre

La démarche est organisée en 4 parties contenant chacune plusieurs étapes. Chaque étape peut être traitée sur une seule séance de 45 minutes à 1 heure, mais l'enseignant pourra intercaler des séances palier pour renforcer une connaissance ou faire le point.

1. Des nouveaux nombres : les fractions

Objectif :

Construire et utiliser des nouveaux nombres (les fractions), plus précis que les entiers naturels pour mesurer les grandeurs continues.

Progression :

Étape 1 : Les entiers naturels ne suffisent pas.
Étape 2 : Une technique pour partager un segment et mettre en évidence l'unité fractionnaire.
Étape 3 : Les fractions pour mesurer exactement.

2 : Des fractions décimales aux nombres décimaux

Objectif :

Donner du sens au nombre à virgule.

Progression :

Étape 1 : Les dixièmes.
Étape 2 : Les centièmes.
Étape 3 : Les millièmes ... et les autres.
Étape 4 : Différentes écritures du nombre décimal

3 : Utilisation des décimaux

Objectif :

Construire les outils de travail sur les décimaux (ranger, calculer) nécessaires à la résolution de problèmes.

Progression :

Étape 1 : Ranger les décimaux.
Étape 2 : Calculer avec les décimaux : somme et différence
Étape 3 : Calculer avec les décimaux : produit d'un décimal par un entier
Étape 4 : Calculer avec les décimaux : quotient d'un décimal par un entier

4 : Évaluation

1. Des nouveaux nombres : les fractions

<u>**Étape 1**</u> : <u>***Les entiers naturels ne suffisent pas.***</u>

Objectif :

Faire prendre conscience de l'insuffisance des entiers naturels dans une situation de mesure de grandeurs continues, car les informations qu'ils procurent manquent de précision.

Organisation de la classe :

La classe est partagée en 2 groupes A et B ayant même nombre d'élèves. À l'intérieur de ces groupes, on constitue des groupes de 2 à 4 élèves (A1, A2, A3 etc. B1, B2, B3, etc.), sans modifier fondamentalement les habitudes de travail de la classe. Il s'agit simplement de favoriser les échanges.

Matériel :

Groupe A : 1 bande unité (Le mot *unité,* écrit dessus, permet de l'identifier) et 1 photocopie de 6 à 8 bandes à mesurer par élève.
Groupe B : 1 bande unité et 1 photocopie de 6 à 8 bandes à mesurer par élève (les bandes du groupe B sont différentes de celles du groupe A).
Des feuilles tableaux (MESURE, RANGEMENT) qui seront affichées lors de la mise en commun, avec indication de la consigne.

Déroulement :

Dire aux élèves : *Nous allons essayer de ranger des bandes de papier en nous servant de la mesure de leur longueur. Voici ces bandes.*

- **R**echerche :
- **P**hase 1 : La feuille des bandes et une unité sont remises à chaque élève. 1 feuille tableau (MESURE, RANGEMENT) est remise à chaque petit groupe A ou B.

<u>Consigne 1</u> :
À l'aide de l'unité, mesurer et exprimer la longueur des bandes pour que vos camarades de l'autre groupe puissent les ranger. On n'a pas le droit de plier l'unité ni d'utiliser une règle graduée. Toutes les bandes doivent être mesurées par au moins 2 élèves différents.
<u>Consigne 2</u> **:**
Reporter les résultats dans le tableau MESURE *qui sera transmis à l'autre groupe.*

- **P**hase 2 : Les tableaux MESURE du groupe A sont transmis au groupe B et inversement.

<u>Consigne</u> :
Ranger les mesures dans l'ordre croissant et noter vos réponses dans le tableau RANGEMENT.

- **M**ise en commun :

1) Le maître affiche les tableaux MESURES et RANGEMENT.
2) Il demande aux élèves de s'exprimer sur la non réussite du rangement.
3) Les élèves sont invités à éclairer leurs écrits et exprimer les mesures avec une écriture mathématique chiffrée.

Synthèse :

1) Une mesure de longueur peut s'exprimer par une écriture chiffrée comportant un encadrement.
2) Les mesures obtenues ne sont pas assez précises pour ranger les bandes. Les seuls nombres entiers ne suffisent pas.
3) Il faudrait pouvoir mesurer plus **précisément** la partie de la bande dont la longueur est inférieure à l'unité.

Étape 2 : ***Une technique pour partager un segment en parts égales et mettre en évidence l'unité fractionnaire.***

Rappel par les élèves du problème à résoudre et de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Faire apprendre l'utilisation d'une technique.
Montrer qu'un segment peut toujours être partagé en n parts égales.

Organisation de la classe :

Par petits groupes de 2 à 4 élèves

Matériel :

10 bandes de papier de couleur de longueur égale à la longueur de l'unité utilisée à l'étape 1.
1 "guide de partage" (réseau de parallèles équidistantes sur une feuille 21X29,7).

Déroulement :

- **R**echerche 1 :

On distribue 4 bandes de couleur par élève.

Consigne :

Partager une bande en 8 parts égales, une autre en 5 parts égales, une troisième en 4 parts égales, et la dernière en 7 parts égales.

- **M**ise en commun :

Le pliage permet seulement d'obtenir 4 ou 8 parts égales. Pour les autres nombres de parts, ce n'est que de l'à peu près.

- **R**echerche 2 :

On distribue alors les "guides de partage" et de nouvelles bandes de même longueur que les précédentes. On explique l'utilisation du guide.

Consigne :

Partager les bandes en 5, 7, 10 ou 11 parts égales.

- **M**ise en commun :

1) Les élèves explicitent ce qu'ils ont fait et les difficultés rencontrées.
2) On compare la part à l'unité.

Synthèse :

1) 1 part < 1 unité
2) La mesure d'une part vaut une unité fractionnaire et s'écrit à l'aide d'une fraction : 1/5, 1/7, 1/11.
3) La fraction peut s'écrire avec 2 orientations possibles du trait : horizontal ou oblique.
4) Le dénominateur indique combien de parts égales on a fait dans l'unité.

<u>Étape 3 *: Les fractions pour mesurer exactement.*</u>

Rappel par les élèves du problème à résoudre et de ce que l'on sait faire.

Objectif :
Construire et employer les fractions pour mesurer exactement un segment quelconque.

Organisation de la classe :
La classe est partagée en 2 groupes A et B ayant même nombre d'élèves. À l'intérieur de ces groupes, on constitue des groupes de 2 ou 3 élèves A1, A2, A3 etc. B1, B2, B3 etc. (comme Étape 1)

Matériel :
Les feuilles de bandes utilisées à l'étape 1, les bandes unités partagées en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 parts égales et 1 feuille MESURE par petit groupe.

D**éroulement :**

- Recherche :

On distribue les feuilles de bandes et les unités.

<u>Consigne</u> :

Mesurer exactement la longueur des bandes et noter les résultats dans le tableau MESURE

- Mise en commun :

1) Affichage et lecture des tableaux des résultats (groupe A et groupe B). Dans chaque groupe, on constate des similitudes (nombre d'unités) et des différences (fractions).

2) Observation et analyse des résultats trouvés. A-t-on une mesure plus précise que l'encadrement ? Peut-on comparer ces mesures ?

Synthèse :

1) On ne peut toujours pas ranger les bandes à l'aide de la mesure de leur longueur.
2) Lecture/écriture normalisée des fractions (2 orientations du trait de fraction).
3) Signification du numérateur et du dénominateur (ce vocabulaire sera employé mais on n'exigera pas sa mémorisation).
4) Des écritures équivalentes : 1/5 + 1/5 + 1/5 = 3/5
5) Besoin de choisir un dénominateur commun.

2 : Des fractions décimales aux nombres décimaux

<u>Étape 1 : *Les dixièmes.*</u>

Rappel par les élèves du problème à résoudre et de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Le partage de l'unité doit être conventionnel, en cohérence avec la numération de position.

Organisation de la classe :

Par petits groupes de 2 à 4 élèves.

Matériel :

Les bandes de la séance 1 et les bandes unités partagées en 1/10
Le tableau MESURE réalisé à l'étape 3. De nouveaux tableaux MESURE et RANGEMENT.

Déroulement :

- Discussion collective :
Les mesures lues permettent-elles le rangement, pourquoi ? quelle solution ?
--> Besoin d'un dénominateur commun conventionnel (il doit dépasser le cadre de la classe et être utilisable par tous).
--> 10 serait intéressant car on réalise déjà des groupements par 10.

- **R**echerche : Les bandes unités partagées en 10 sont distribuées. Les élèves réutilisent leurs feuilles de bandes à mesurer.
<u>Consigne</u> :
Mesurer les bandes avec le nouvel outil. Compléter le tableau MESURE.

- Les tableaux MESURE sont échangés (groupe A, groupe B)
<u>Consigne</u> :
Ranger les bandes dans l'ordre croissant de leur mesure.

- Mise en commun :
1) Qui a pu ranger ? Pourquoi ?
2) Affichage des tableaux MESURE, commentaires, explicitation des fractions produites, justification par les élèves.
3) Rangement des mesures.

Synthèse :

1) Le rangement est toujours impossible.
2) On a besoin d'un nouvel outil pour mesurer la longueur inférieure au 1/10.

Remarques :

Lors de l'expérimentation, nous avons constaté que les élèves avaient du mal à prendre en compte la totalité de la bande et éprouvaient des difficultés à écrire le nombre d'unités entières, surtout lorsque ce nombre est zéro.

Étape 2 : *Les centièmes.*

Rappel par les élèves du problème à résoudre et de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Étendre la démarche de partage par 10. Passer à l'écriture conventionnelle (écriture à virgule) du nombre décimal.

Organisation de la classe :

Par petits groupes de 2 à 4 élèves.

Matériel :

Les bandes de la séance 1.
Les unités partagées en 10.
Par élève, une unité partagée en 10 avec un dixième lui-même partagé en 10 parts égales.

Déroulement :

- **D**iscussion :
  On sait faire un encadrement de la mesure des bandes avec des unités et des dixièmes.
  Pourquoi ne peut-on pas donner une information plus précise ?
  --> à cause des "petits bouts".
  Quelle solution ?
  --> partager le dixième en 10 parts égales (on obtient des petites parts)
- **R**echerche :
  Distribuer le matériel préparé. S'interroger sur le nom et la valeur de la "petite part".
  --> 1/100 ou 1/10 de dixième.
  Consigne **:**
  Mesurer les bandes le plus exactement possible.

- **M**ise en commun :
  1) Les mesures des élèves : Affichage, argumentation.
  2) Comparaison et rangement des mesures.

Auto-évaluation :

Découper les bandes, les ranger et comparer avec le rangement des mesures.

Une écriture conventionnelle du nombre décimal :

On reprend la forme d'écriture donnée ci-dessus : par exemple 3 et 2/10 4/100. L'enseignant propose d'effacer "et" 10, 100. Il obtient 3 2 4.
Les élèves n'acceptent pas à cause des confusions possibles. Ils proposent de matérialiser la séparation entre 3 et 2 4.
C'est la virgule qui sera présentée comme signe conventionnel. On verra sur la calculatrice ou l'ordinateur que ce signe peut être remplacé par un point.
Pourquoi n'est - il pas nécessaire de séparer 2 et 4 ? A-t-on le droit de lire 24 ?

Synthèse :

1) Les mesures s'expriment en unités, dixièmes et centièmes. On peut les écrire par exemple : 3 et 2/10 et 4/100.
2) Le rangement peut se faire complètement.

3) L'écriture 3 et 2/10 4/100 s'écrit aussi 3,24 dans laquelle 3 représente les unités, 2 les dixièmes et 4 les centièmes.
4) 2 dixièmes et 4 centièmes valent 24 centièmes (car 2 dixièmes peuvent se partager en 20 centièmes).

Exercice d'entraînement :

Proposer une écriture d'un nombre et demander aux élèves d'en trouver d'autres. Par exemple :
1u et 7/10 = 1,7 = 17/10
1,73 = 1+7/10+3/100
7/10 = 0,7
3/100 = 0,03

Étape 3 : *Les millièmes ... et les autres*.

Remarque : C'est pour dépasser l'image sociale que des élèves ne manqueront pas d'associer au nombre décimal qui vient d'être construit (référence aux mesures en franc et centimes, mètre et centimètres), qu'il nous a semblé nécessaire de réaliser cette étape même si, pour des raisons matérielles, elle se déroule plutôt sur un mode directif.

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectif :

Généraliser la démarche récurrente de partage par 10. Adapter le niveau de précision de la mesure au matériel utilisé.

Organisation de la classe :

Organisation de tous les jours.

Matériel :

1 ruban unité mesurant au moins 2m (pour que les millièmes soient bien visibles et que leur partage en 10 soit envisageable) sur lequel 10 dixièmes et 10 centièmes sont matérialisés.
1 guide de partage (écartement 2 mm pour partager les centièmes en millièmes).
1 segment tracé au tableau (préparé avant l'arrivée des élèves. Sa mesure, avec le segment unité ci-dessus, s'écrira sous forme d'un encadrement au 1/1000. Par exemple,
1,752 < mesure < 1,753

Déroulement :

Travail en grand groupe, le maître assurant les manipulations.
On mesure le segment avec le ruban unité. Le résultat n'étant pas satisfaisant aux centièmes, on renvoie le problème aux élèves qui proposent de partager 1 centième en 10. On affine la mesure mais on constate qu'elle pourrait encore être précisée. Il faudrait encore appliquer la règle du partage en 10.

Synthèse :

1) Généralisation du partage en 10 parts égales.

1 unité --> 10 dixièmes
1 dixième --> 10 centièmes
1 centième --> 10 millièmes
etc.

2) 1 unité contient 10 dixièmes ou 100 centièmes ou 1000 millièmes etc.

Étape 4 : *Différentes écritures du nombre décimal*

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Étendre les règles de la numération de position à la partie décimale.

Organisation :

Par groupes de 7 élèves.

Déroulement :

- Recherche collective : On se propose de constituer une collection d'écritures différentes d'un même nombre.

Consigne de travail individuel :

Trouver différentes façons d'écrire 2,543.

- Mise en commun :

Inventaire des écritures, justification, argumentation, validation.

Synthèse :

1) De nombreuses écritures que l'on peut ranger (transformation de l'écriture précédente) :

forme 1 : 2,543
forme 2 : 2 + 5/10 + 4/100 + 3/1000
forme 3 : 2u + 5 dixièmes + 4 centièmes + 3 millièmes
forme 4 : 2 + 0,5 + 0,04 + 0,003
forme 5 : 2 + 0,543
forme 6 : 2u + 543 millièmes
forme 7 : 2543/1000

2) Quelle que soit l'écriture, on retrouve les mêmes chiffres à la même place.

3) C'est la place occupée par le chiffre qui lui donne sa valeur dans le nombre. On peut donc étendre à droite le tableau de la numération de position :

u de mille	centaines	dizaines	unités	,	dixièmes	centièmes	millièmes

Systématisation :

Retrouver les différentes écritures d'un décimal dans l'ordre ci-dessus.

À cet effet, une feuille partagée en 9 bandes va circuler entre les élèves d'un même groupe (de 7 élèves). Cette feuille est pliée au fur et à mesure de la transmission pour que l'élève qui la reçoit ne voie que l'écriture précédente selon l'illustration suivante :

Le premier élève reçoit cette feuille, et écrit sa réponse. Il replie la 1ère bande pour cacher 4,627 et transmet.

4,627

Le deuxième élève reçoit ceci, écrit sa réponse, replie la 2ème bande et transmet.

la bande supérieure cache 4,627
4 + 6/10 + 2/100 + 7/1000

Plusieurs nombres seront proposés aux élèves. Par exemple : 4,627 - 14,28 - 7,03 - 0,324 - 200,075
Les feuilles seront préparées à l'avance (les bandes sont tracées, le nombre est écrit dans la 2ème bande.)
On veillera à changer à chaque tour l'élève qui débute.

- Mise en commun : Lecture des travaux de chaque groupe. Argumentation, validation.

3 : Utilisation des nombres décimaux

Étape 1 : *Ranger les décimaux*

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Construire et formuler l'algorithme de rangement des décimaux.

Organisation :

Par groupes de 2 à 4 selon le fonctionnement habituel de la classe

Matériel :

Par groupe, 1 feuille 21 X 29,7 portant la liste des nombres à ranger et un feutre.

Déroulement :

Consigne :

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant. Écrire la réponse sur la feuille qui sera affichée.

45,024 - 4,0024 - 45,24 - 45,204 - 45,3 - 45,239 - 45024 - 450,24 - 4,503 - 0,45204

Mise en commun :

Affichage des productions :

- comparaison
- explicitation des démarches par les élèves

Synthèse :

Explicitation de l'algorithme par les élèves. (Voici le détail à l'usage du maître)

- 1) Comparer 2 décimaux :
  - Comparer les parties entières.
  Si elles sont inégales, le plus petit nombre est celui qui a la plus petite partie entière.
  - Sinon, comparer les dixièmes entre eux.
  S'ils sont inégaux, le plus petit nombre est celui qui a le plus petit nombre de dixièmes.
  - S'ils sont égaux, appliquer la règle ci-dessus aux centièmes puis aux millièmes etc. jusqu'à trouver 2 valeurs différentes.

- 2) Ranger les décimaux dans l'ordre croissant :
  - Comparer les 2 premiers nombres de la série, garder le plus petit.
  - Appliquer la règle ci-dessus au plus petit nombre retenu et au suivant dans la série.
  - Recommencer jusqu'à la fin de la série pour trouver le plus petit nombre et l'extraire de la série.
  - Recommencer la comparaison avec la nouvelle série.

Étape 2 : *Calculer avec les décimaux : Somme et différence de décimaux*

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Étendre l'algorithme de l'addition ou de la soustraction des nombres entiers aux décimaux en s'appuyant sur la signification des chiffres dans l'écriture à virgule.

Organisation :

Par groupes de 2 à 4 selon le fonctionnement habituel de la classe.

Matériel :

Par groupe, 1 feuille 21X29,7 et un feutre.

Pour la classe, 1 calculette et une bande unité collective avec les dixièmes et les centièmes.

Déroulement :

Consigne orale :

Calculez 2,5 + 1,7. Écrivez ce que vous faites et votre résultat sur la feuille.

Mise en commun :

Inventaire des résultats

Explicitation des procédures par les élèves (pas de validation du maître)

Comparaison avec le résultat donné par la calculette.

Repérage et analyse des erreurs. Vérification par retour aux bandes.

Systématisation du calcul de la somme :

En prenant le même déroulement que ci-dessus, faire calculer successivement :

2,18 + 4,2   15,25 + 4,352   24,50 + 5,80

Synthèse :

1) Poser le calcul en alignant les chiffres de même rang et donc les virgules.

2) Calculer les sommes partielles en colonnes en reportant les retenues comme pour les entiers.

3) Ne pas oublier la virgule au résultat.

Application au calcul d'une différence :

En procédant comme pour la somme, faire calculer successivement :

6,45 - 3,23   25,38 - 14,62   8 - 5,3   9,08 - 4,732.

Synthèse :

1) Poser le calcul en alignant les chiffres de même rang et donc les virgules.

2) Calculer les différences partielles en colonnes en reportant les retenues comme pour les entiers.

3) Lorsque les nombres de décimales sont différents, on peut compléter avec des zéros terminaux.

Étape 3 *: Calculer avec les décimaux : Produit d'un décimal par un entier*

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Étendre l'algorithme de la multiplication de 2 entiers à la multiplication d'un décimal par un entier.

Organisation :

Par groupes de 2 ou 4 selon le fonctionnement habituel de la classe

Matériel :

Par groupe, plusieurs bandes de longueur 1,4 plusieurs bandes de longueur 2,7, et 1 feuille 21 X 29,7.
Pour la classe, une calculette.

Déroulement :

Consigne :
Calculez 1,4 X 5. Écrivez ce que vous faites et votre résultat sur la feuille.
Calculez 2,7 X 6. Écrivez ce que vous faites et votre résultat sur la feuille.

Mise en commun :
Affichage des productions :
- comparaison
- explicitation des démarches
-- interrogation si nécessaire de la calculette.

La matérialisation de l'opération avec les bandes (mises bout à bout ou en quadrillage) met en évidence l'échange 10/10 contre une unité et montre bien que les retenues passent, comme avec les entiers, d'une colonne à l'autre. Les élèves comprennent ainsi facilement pourquoi 1,4 X 5 n'est pas égal à 5,20.

Synthèse :

1) Multiplier un décimal par un entier c'est ajouter le décimal un nombre de fois égal à la valeur de l'entier.
2) Pour effectuer le calcul, on multiplie chaque chiffre du décimal en reportant les retenues comme sur les entiers.
3) On ne place pas la virgule en "l'abaissant" comme pour l'addition ou la soustraction mais en s'interrogeant sur le rang du chiffre le plus à droite du produit.

Étape 4 : *Calculer avec les décimaux : Diviser un décimal par un entier*

Rappel par les élèves de ce que l'on sait faire.

Objectifs :

Étendre l'algorithme de la division sur les entiers à la division d'un décimal par un entier.

Organisation :

Par groupes de 2 à 4 selon le fonctionnement habituel de la classe

Matériel :

Par groupe, 1 feuille 21 X 29,7 et un feutre.
Par élève, une bande mesurant 4,7 unités.

Déroulement :

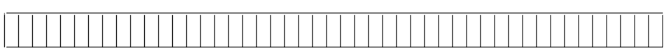
Consigne :
Diviser 4,7 par 3. Détailler votre démarche sur la feuille qui sera affichée.

Mise en commun :
Affichage des productions :
- comparaison
- explicitation des démarches par les élèves

Démarches possibles (à usage des adultes) obtenues par travail sur la bande :

1) On partage d'abord les unités entières : 4 ÷ 3 : q = 1 r = 1.
ensuite on transforme le reste en dixièmes : 1 = 10/10
puis on ajoute : 10/10 + 7/10 = 17/10
enfin, on partage les dixièmes : 17/10. 17 ÷ 3 : q = 5 r = 2.
Donc 4,7÷ 3 donne 1 + 5/10 (1,5) comme quotient et 2/10 comme reste.
L'algorithme de la division des entiers est étendu tel quel aux décimaux.

2) On transforme tout en dixièmes.



4,7 = 47/10. 47 ÷ 3 donne 15 comme quotient et 2 comme reste.
Donc 4,7 / 3 donne 1,5 comme quotient et 0,2 comme reste.
Cette démarche oblige un double changement d'unités (du dividende puis du quotient)

Prolongement :

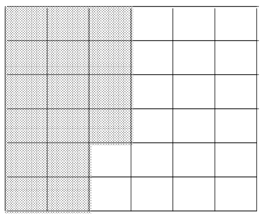
Calcul du quotient approché de 2 entiers (au $1/10^{\text{è}}$ au $1/100^{\text{è}}$)

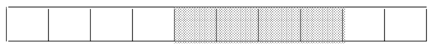
4 : Évaluation

"La maîtrise des nombres décimaux est loin d'être assurée au sortir de l'école primaire" (Note de service N° 96 279 du 29 - 11 - 1996). On pourra cependant observer à l'aide des exercices suivants :

1) La capacité des élèves à utiliser les fractions pour exprimer la mesure d'une grandeur continue :

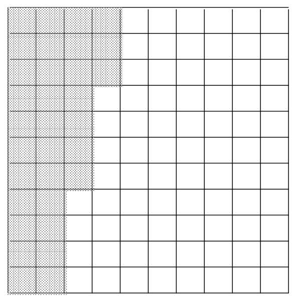
Le quadrillage ou la bande mesure 1. L'élève doit écrire la mesure de la partie grisée sous forme d'une fraction.

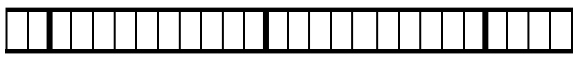




2) La capacité des élèves à utiliser l'écriture décimale :

Le quadrillage ou la bande mesure 1. L'élève doit écrire la mesure de la partie grisée sous forme d'un nombre décimal.





L'élève doit colorier un morceau de bande mesurant 1,7 unité. (La bande unité est donnée en parallèle).

3) La capacité des élèves à comparer, intercaler, ranger des décimaux :

Les exercices donnés aux élèves sont présents dans la partie "matériel".

Remarques :

L'outil proposé comporte 2 parties qui peuvent être dissociées :

La première partie permet de vérifier la capacité des élèves à utiliser les fractions ou les nombres décimaux pour écrire la mesure de grandeurs continues.

La deuxième partie mesure la capacité des élèves à utiliser les nombres décimaux.

Les enseignants ont donc toute liberté pour utiliser tout ou partie de cet outil.

Unité 1 Étape 1
Unité 1 Étape 2

Bandes unités. Dupliquer sur carton fort et découper

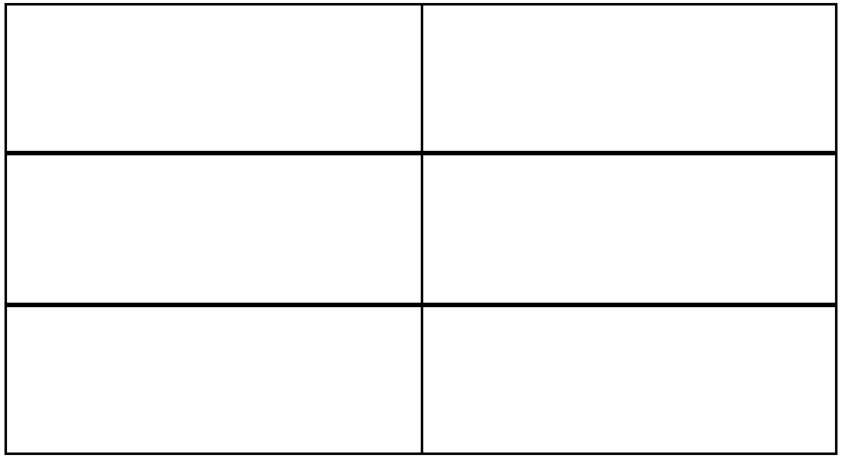
Unité	Unité
Unité	Unité
Unité	Unité
Unité	Unité
Unité	Unité
Unité	Unité
Unité	Unité

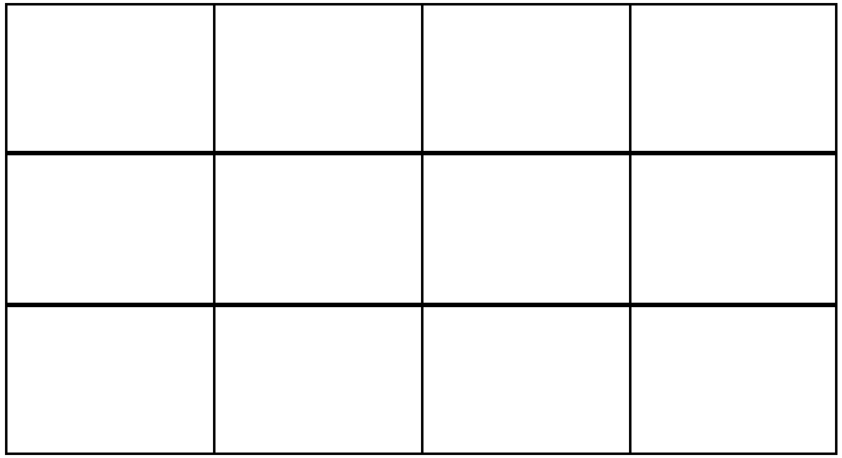
Unité 2 Étape 1
Unité 2 Étape 2

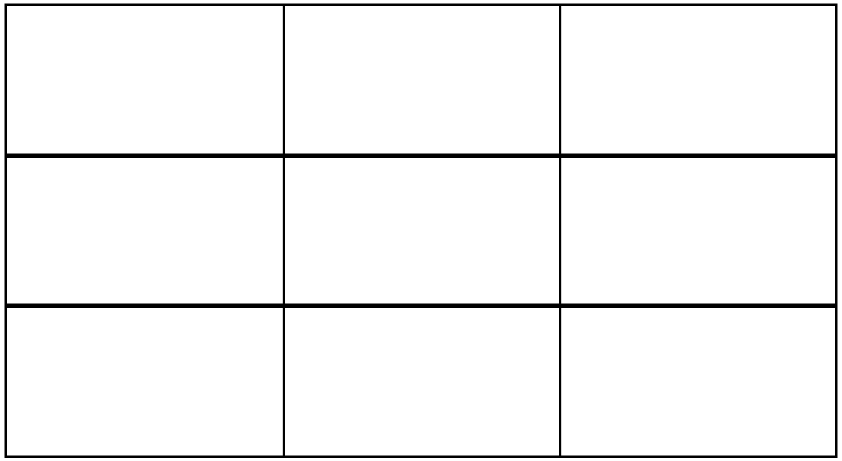
Bandes unités partagées en 1/10. Dupliquer sur carton fort et découper

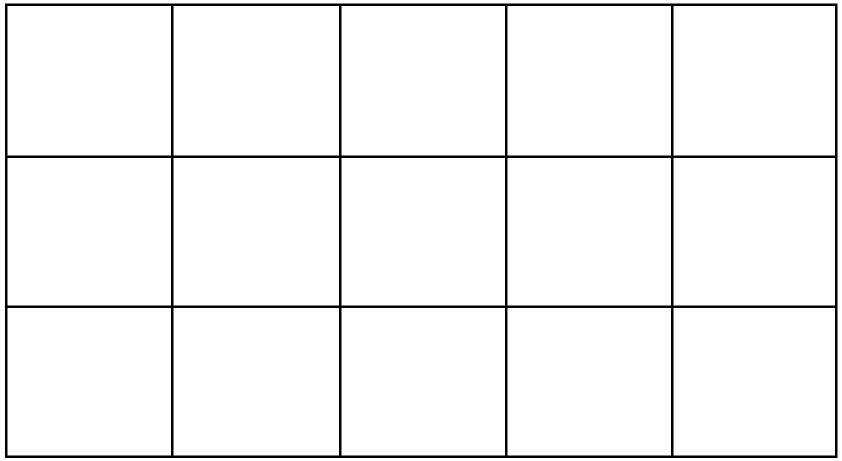
Unité 1 Étape 3

Bandes unités partagées en 2, 3, 4 parts égales. Dupliquer sur carton fort et découper



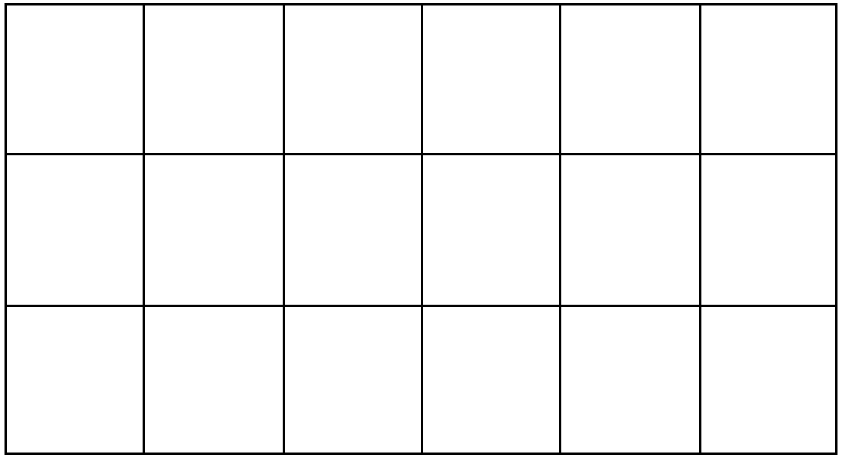


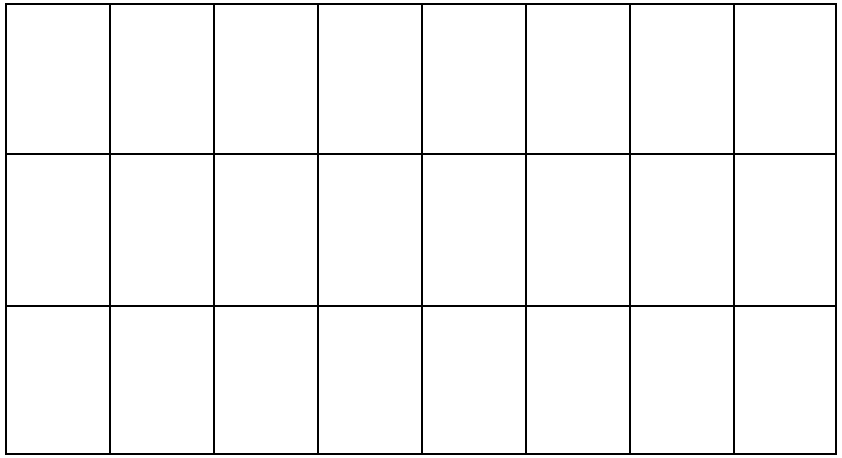


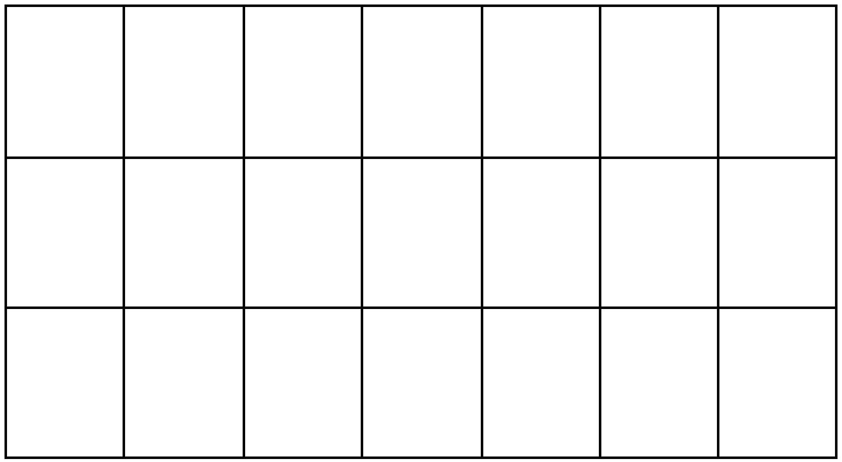


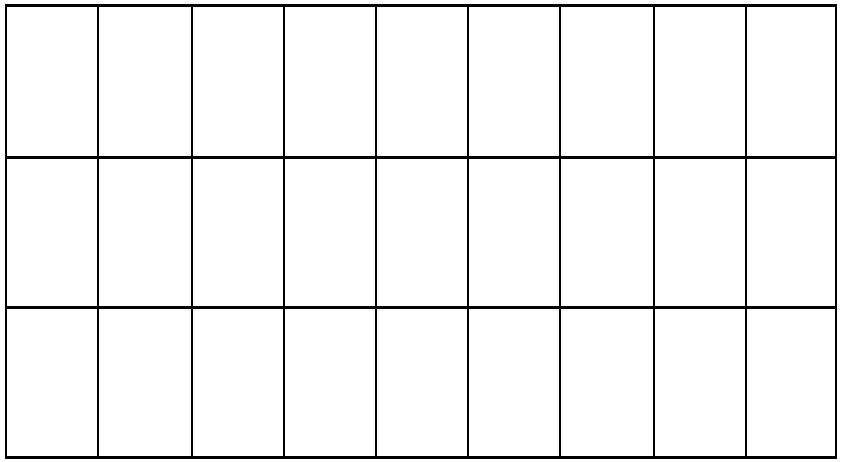
Unité 1 Étape 3

Bandes unités partagées en 6, 7, 8, 9 parts égales. Dupliquer sur carton fort et découper









Unité 1 Étape 1
Unité 1 Étape 3

Tableaux MESURE . Dupliquer en agrandissant pour permettre une lecture collective

GROUPE A MESURE *J'écris la longueur des bandes*	
A	
B	
C	
D	
E	
F	

GROUPE B MESURE *J'écris la longueur des bandes*	
G	
H	
I	
J	
K	
L	

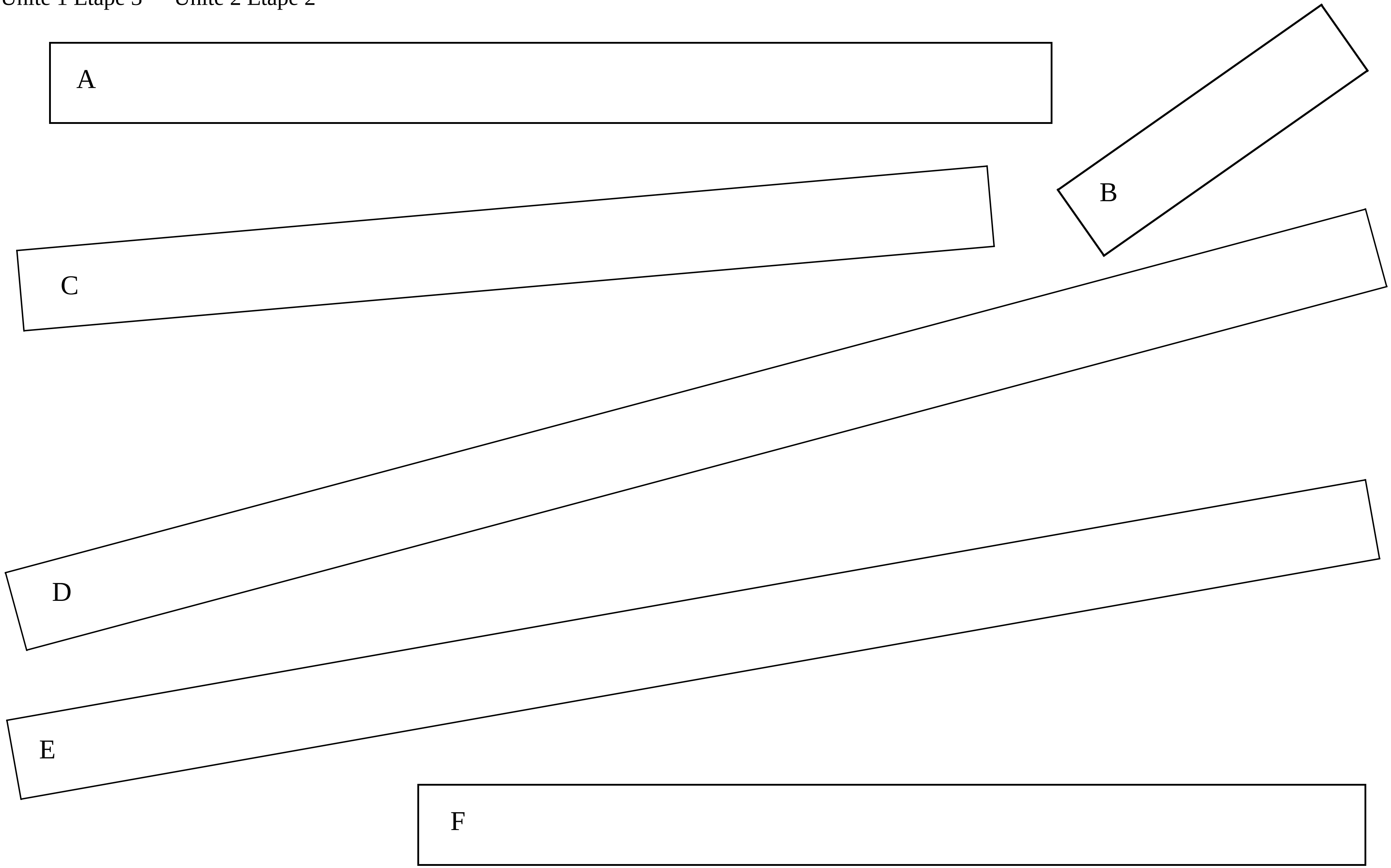
Tableaux RANGEMENT . Dupliquer en agrandissant pour permettre une lecture collective.

GROUPE A RANGEMENT *Je range les bandes dans l'ordre croissant de leur longueur (j'écris leur nom de haut en bas)*

GROUPE B RANGEMENT *Je range les bandes dans l'ordre croissant de leur longueur (j'écris leur nom de haut en bas)*

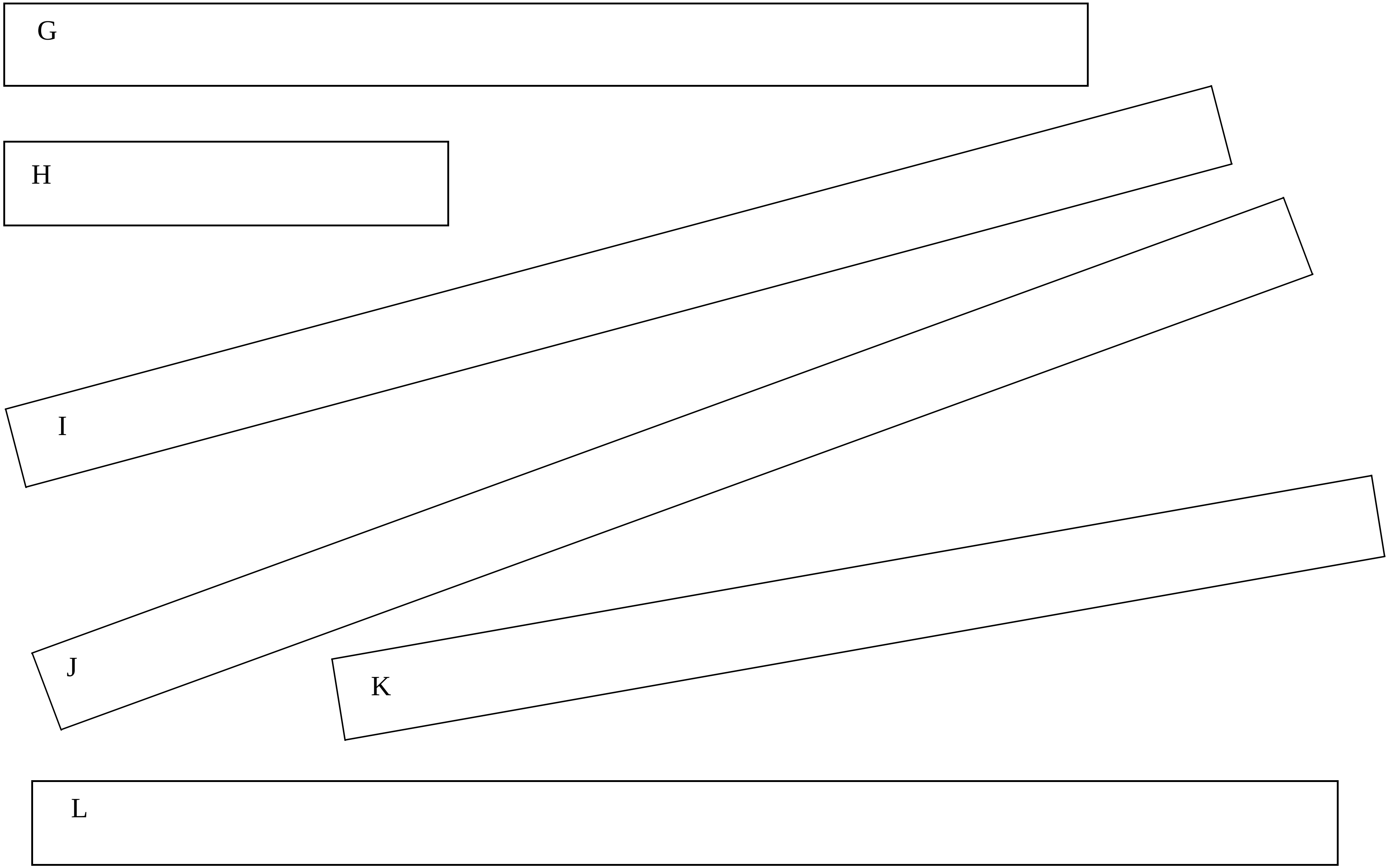
Unité 1 Étape 1 Unité 2 Étape 1
Unité 1 Étape 3 Unité 2 Étape 2

Bandes à mesurer pour le groupe A. Dupliquer sur du papier



Unité 1 Étape 1 Unité 2 Étape 1
Unité 1 Étape 3 Unité 2 Étape 2

Bandes à mesurer pour le groupe B. Dupliquer sur du papier



Guide de partage. Dupliquer sur du carton fort (bristol)

Guide de partage. Dupliquer sur du carton fort (bristol)

Unité 3 Étape 4

Bande pour diviser un décimal par un entier. Dupliquer sur du papier et découper

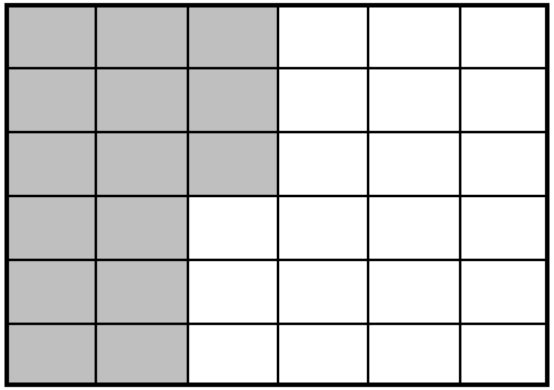
Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant. Écrire la réponse sur cette feuille qui sera affichée.

45,024 - 4,0024 - 45,24 - 45,204 - 45,3 - 45,239 - 45024 - 450,24 - 4,503 - 0,45204

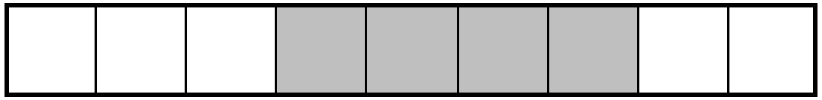
Utiliser le cadre ci-dessous comme brouillon

Écrire la réponse dans le cadre ci-dessous

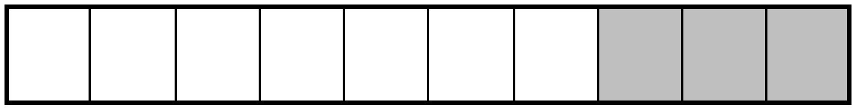
La mesure du quadillage est 1. Écris sous forme d'une fraction la mesure de la partie grisée

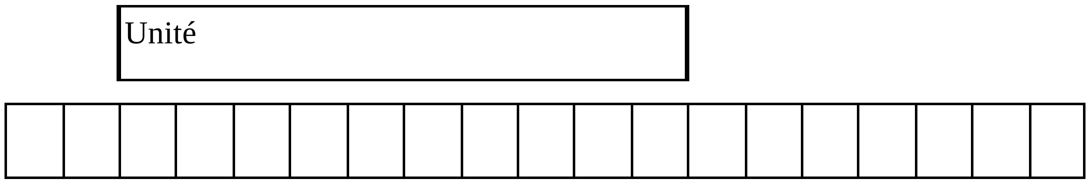


La mesure de la bande est 1. Écris sous forme d'une fraction la mesure de la partie grisée



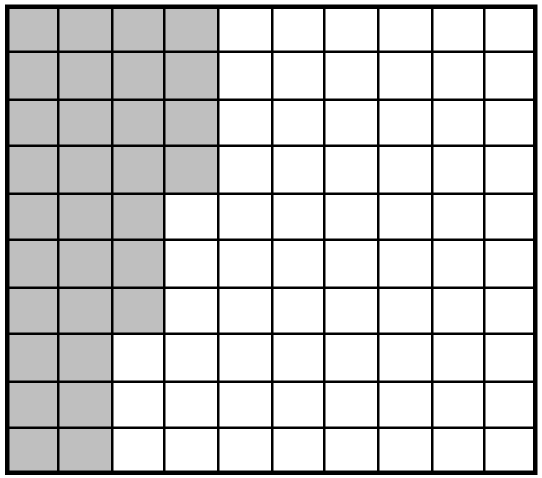
La mesure de la bande est 1. Écris sous forme d'un nombre décimal la mesure de la partie grisée





Colorier un morceau mesurant 1,7 unité

La mesure du quadillage est 1. Écris sous forme d'un nombre décimal la mesure de la partie grisée



Écrire le signe qui convient (< > =)

Écris le signe qui convient (< > =)

3,4		3,45
2,7		1,98
2,8		2,800
2,57		2,507

Écris un nombre compris entre les 2 nombres donnés

3,4		3,9
3,46		3,5
3,04		3,05

Range ces 8 nombres du plus petit au plus grand

3,4	3	3,34	3,04	2,789	3,401	2,87	3,045

Pose et calcule :

2,17 + 1,4 +0,354 ***12,6 - 4,57***
32,9 X 7 ***52,3 : 15***

Dispose tes calculs sur une feuille séparée.

Unité 2 Étape 2

Bandes unités partagées en 1/10 et 1/100. Dupliquer sur carton fort et découper