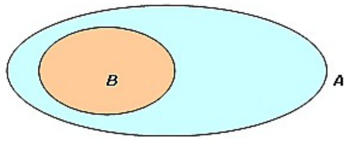
# Proportion : définition et propriétés

## 1. Définition

Soit **A** un ensemble appelé **population**, ayant un nombre ***a*** d'éléments (***a*** non nul) et **B** une partie de l'ensemble **A**, une **sous-population**, ayant un nombre ***b*** d'événements.

**Remarque** : Le **nombre d'éléments** d'une population est appelé l'**effectif**.

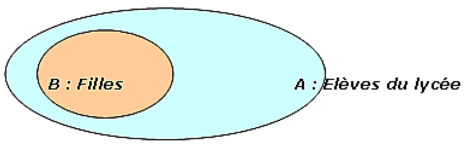



La **proportion** (ou fréquence) **de B par rapport à A** est le nombre (réel) défini par le rapport : $\frac{b}{a} = \frac{\text{nombre d'éléments de l'ensemble B}}{\text{nombre d'éléments de l'ensemble A}}$

**Remarques :**

- Le nombre ***a*** est toujours supérieur ou égal au nombre ***b***.
- Par conséquent le rapport $\frac{b}{a}$ est un nombre compris entre 0 et 1.
- On parle toujours de proportion « de »… « par rapport à ».

***Exemple :*** Dans un lycée de 735 élèves il y a 385 filles. On cherche à calculer la proportion de filles par rapport à l'ensemble des élèves de ce lycée.




La population **A** est donc ici l'ensemble des élèves du lycée et la sous-population **B** représente les filles de ce lycée.
La proportion de filles par rapport à l'ensemble des élèves de ce lycée est donc le nombre réel : $\frac{385}{735} = \frac{11 \times 35}{21 \times 35} = \frac{11}{21}$

## 2. Expressions d'une proportion

### *a. Sous forme décimale*

Comme nous l'avons vu, une proportion (d'un ensemble **A** par rapport à un ensemble **B**) se calcule sous la forme d'une fraction irréductible. On peut donc aussi, même si c'est peu courant, donner le résultat sous la forme d'un réel avec une précision donnée.

***Exemple :*** Dans l'exemple précédent, la proportion de filles par rapport à l'ensemble des élèves est égale à $\frac{11}{21}$, soit environ 0,523809. On peut décider de donner cette proportion avec 4 chiffres après la virgule (donc à $10^{-4}$ près) : **0,5238 à 0,0001 près** (ou à $10^{-4}$ près).

**Remarque :** Sous cette forme il faudra toujours préciser le degré d'approximation choisi. Il est fréquemment de 4 chiffres significatifs.

### *b. Sous forme de pourcentage*

Il est plus habituel, cependant, d'exprimer une proportion sous forme de pourcentage avec une précision de 2 chiffres après la virgule pour le pourcentage lorsque le résultat n'est pas un nombre entier.

***Exemple :*** Dans l'exemple précédent, la proportion est égale à $\frac{11}{21}$, soit environ 0,523829 = $\frac{52,2829}{100}$, ce qui représente **52,38 % à 0,01 % près**. Ainsi, plus de la moitié des élèves de ce lycée sont des filles.

**Remarque :** Sous cette forme il faudra toujours préciser le degré d'approximation choisi. On donne souvent le résultat à 0,0001 près soit 0,01 % près.

**Définition :**

**La proportion exprimée en pourcentage de B par rapport à A** est le nombre (réel) défini par le rapport : $\boxed{\dfrac{b}{a} = \dfrac{t}{100} = t\ \%}$

Pour obtenir directement le nombre **t** on peut écrire : $\boxed{\dfrac{b}{a} \times 100 = t}$

**Remarque** : on dit que **B représente t % de A**.

**Exemple et remarque importante :** Dans l'exemple précédent, on cherche à calculer la proportion de filles par rapport à l'ensemble des élèves dans un lycée de 735 élèves pour 385 filles.

On peut écrire que la proportion cherchée est : $\dfrac{385}{735} = 52{,}38\ \%$ à 0,01 % près ou que : $\dfrac{385}{735} \times 100 \approx 52{,}38$

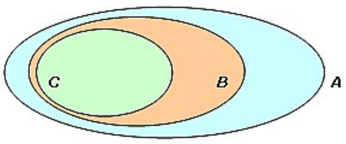
Donc la proportion de filles dans le lycée est d'environ 52,38 %

Mais écrire que $\dfrac{b}{a} \times 100$ est égal à 52,38 % est faux. En effet : $\dfrac{385}{735} \times 100 \approx 52{,}38 \neq \dfrac{52{,}38}{100} = 52{,}38\ \%$

Il est plus habituel, cependant, d'exprimer une proportion sous forme de pourcentage avec une précision de 2 chiffres après la virgule pour le pourcentage lorsque le résultat n'est pas un nombre entier.

## 3. Pourcentages de pourcentages

**Propriété :** Soient **A** un ensemble ayant un nombre ***a*** d'éléments (***a*** non nul), **B** une partie de l'ensemble **A** ayant un nombre ***b*** (non nul) d'éléments et ***C*** une partie de **B** ayant ***c*** éléments.




Si : ***C*** représente $t_1\%$ de **B** et si **B** représente $t_2\%$ de **A**, alors ***C*** représente $t_1\% \times t_2\%$ **de A**.

**Remarque** : on peut écrire ce rapport sous la forme $\boxed{\dfrac{t_1 \times t_2}{100}\ \%}$

**Démonstration** :

Si **B** représente $t_1\%$ de **A**, alors $\dfrac{b}{a} = t_1\%$ et Si ***C*** représente $t_2\%$ de **B**, alors $\dfrac{c}{b} = t_2\%$

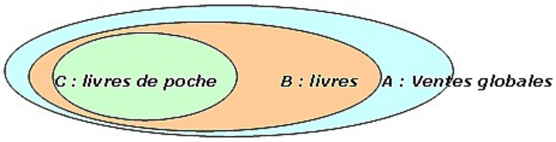
Or : $\dfrac{b}{a} \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{b \times c}{a \times b} = \dfrac{c}{a}$

Ce qui représente la proportion de ***C*** par rapport à **A**.

Donc $t_1\% \times t_2\% = \dfrac{c}{a}$ représente bien la proportion de ***C*** par rapport à **A**.

***Exemple*** : Une librairie-papeterie fait 38 % de son chiffre d'affaire sur la vente de livres. Elle a vendu en un mois pour 2 500 euros de livres, dont 69 % en livres de poche. Calculer le pourcentage de livres de poche sur le chiffre d'affaires global de la librairie-papeterie.

On peut schématiser ainsi le problème :
On est bien dans le cas d'application de la propriété sur les pourcentages de pourcentages. Donc le pourcentage de livres de poche sur le chiffre d'affaires global de la librairie-papeterie est donné par :




$69\% \times 38\% = \dfrac{69}{100} \times \dfrac{38}{100} = \dfrac{69 \times 38}{100}\ \% = 26{,}22\%$

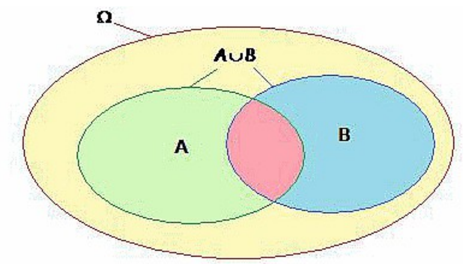
Ainsi, 26,22 % du chiffre d'affaires global provient de la vente des livres de poche.

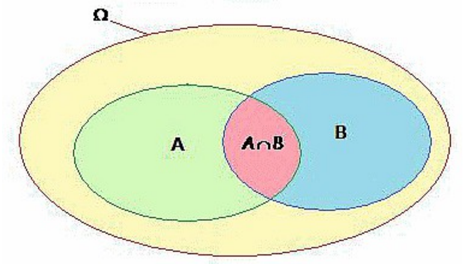
# Proportion et réunion

## 1. Proportion et réunion

Soit $\Omega$ une population donnée et $A$ et $B$ deux sous-populations de $\Omega$.

Soit $P_A$ et $P_B$ la proportion de $A$ et $B$ par rapport à $\Omega$.




Si $A \cap B$ est vide, alors les ensembles sont dits « **disjoints** »

**Propriété :** si A et B sont deux sous-populations d'une population $\Omega$, alors : $P_{(A \cup B)} = P_A + P_B - P_{(A \cap B)}$

***Exemple* :** Une entreprise spécialisée dans l'informatique vend aux entreprises 800 ordinateurs par mois. 300 de ces ordinateurs sont vendus avec un pack « gestion », 400 avec un pack « secrétariat » et 100 ordinateurs sont vendus avec les deux.

► Quelle proportion d'ordinateurs sont vendus avec au moins un de ces packs ?

Si **A** représente la population des ordinateurs avec le pack « **gestion**» et **B** la population avec le pack « **secrétariat** » alors le problème revient à chercher **(A ∪ B)** :

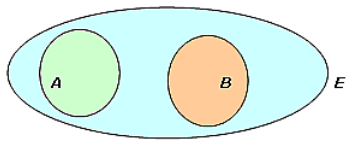
$P_A = \frac{400}{800} \times 100 = 50\ \%$ et $P_B = \frac{300}{800} \times 100 = 37{,}5\ \%$ d'où $P_{(A \cap B)} = \frac{100}{800} \times 100 = 12{,}5\ \%$

Donc : $P_{(A \cup B)} = P_A + P_B - P_{(A \cap B)} = 50\% + 37{,}5\% - 12{,}5\% = 75\%$

75 % des ordinateurs ont au moins un des deux packs.

## 2. Cas des sous-populations disjointes

Si A et B sont deux sous-populations disjointes alors $A \cap B = \varnothing$ (ensemble vide) et $P_{(A \cup B)} = P_A + P_B$

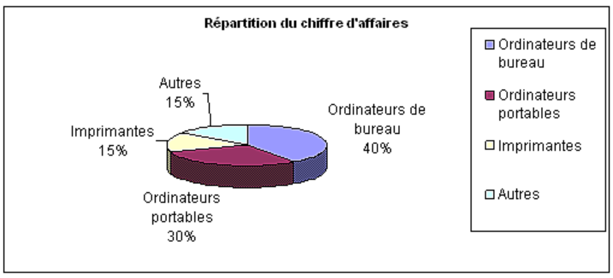



**Remarques :**

• Pour appliquer cette formule, il faut impérativement que les ensembles **A** et **B** soient disjoints, c'est-à-dire qu'ils n'aient pas d'éléments en commun.

• Il faut, en outre, que les proportions considérées soient bien exprimées par rapport au même ensemble **E**.

***Exemple* :** La répartition du chiffre d'affaires d'un groupe spécialisé dans la micro-informatique est la suivante :




*Calculer la part en pourcentage du chiffre d'affaires de ce groupe relative aux ordinateurs.*

Ceci est une **application directe** du calcul de la **proportion d'une réunion d'ensembles disjoints** (puisqu'un ordinateur ne peut pas être à la fois de bureau et portable).

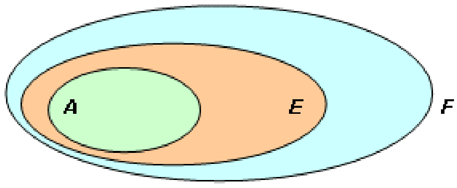
Donc la proportion cherchée est la somme des proportions de chacun des ensembles.
La **part en pourcentage** du chiffre d'affaires de ce groupe relative aux ordinateurs est donc de : **40% + 30% = 70%**

L'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à **A et B** est appelé l'intersection de **A** et **B**.

On la note **A ∩ B** et on lit « ***A inter* B** ».

# Proportions échelonnées

## 1. Proportions échelonnées




Si **p** est la proportion de l'ensemble ***A*** dans l'ensemble **E** et ***p'*** la proportion de **E** dans **F**, alors la proportion ***P*** de ***A*** dans **F** est :

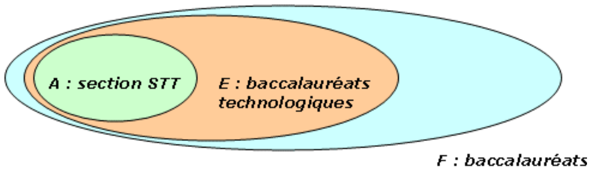
$$P = p \times p'$$

***Exemple*** **:** En 2005, les baccalauréat technologiques représentaient 36 % des baccalauréats (hors baccalauréats professionnels) et la section STT représentait 53 % des baccalauréats technologiques.

Donc ici :

- **p** = 53 % est la proportion de la section STT (***A***) dans l'ensemble **E** des baccalauréats technologiques
- **p'** = 36 % est la proportion des baccalauréats technologiques (**E**) dans l'ensemble **F** des baccalauréats

En 2005, la section STT représentait donc : $\frac{36}{100} \times \frac{53}{100} = \frac{36 \times 53}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{36 \times 53}{100}$ % = 19,08% de l'ensemble des baccalauréats (hors baccalauréats professionnels).




**Remarque** **:** Il faut toujours bien préciser l'ensemble de référence, c'est-à-dire par rapport à quel ensemble on calcule la proportion.

## 2. Tableaux de contingences (ou tableaux croisés d'effectifs)

*Ces tableaux constituent le champ privilégié d'application des proportions échelonnées.*

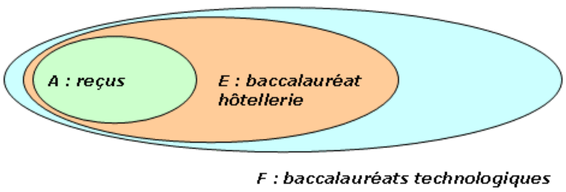
***Exemple*** : Résultats du baccalauréat technologique de juillet 2005 :

| | Présents | Reçus | Ajournés | % reçus | % ajournés |
|---|---|---|---|---|---|
| Hôtellerie | 2514 | 2175 | 339 | 86,5 | 13,5 |
| SMS | 23501 | 18061 | 5440 | 76,9 | 23,1 |
| STI | 43657 | 33552 | 10105 | 76,9 | 23,1 |
| STL | 7545 | 6268 | 1277 | 83,1 | 16,9 |
| STT | 93803 | 70295 | 23508 | 74,9 | 25,1 |
| F11 | 320 | 286 | 34 | 89,4 | 10,6 |
| Agricole | 6748 | 5339 | 1409 | 79,0 | 21 |
| Total | 178098 | 135976 | 42122 | 73,3 | 23,7 |

On peut calculer le pourcentage de reçus de la section hôtellerie par rapport aux candidats présents au baccalauréat technologique de juillet 2005.

- **p** = 86,5 % est la proportion de reçus (***A***) dans la section hôtellerie (**E**) au baccalauréat en juillet 2005.

- $p' = \frac{2514}{178098} \approx$ 1,412% est la proportion de la section hôtellerie (**E**) dans l'ensemble **F** des candidats présente au baccalauréat technologique de juillet 2005.




Donc : $p \times p' \approx$ 86,5% x 1,412% = 1,22138 % est le pourcentage de reçus de la section hôtellerie par rapport aux candidats présents au baccalauréat technologique de juillet 2005.

**Remarque** **:** On pouvait ici calculer directement cette proportion puisque l'on dispose du nombre de reçus de la section hôtellerie et du nombre de candidats total.

Le calcul donne alors : $\frac{2175}{178098} \approx$ 1,22 %