Equations et Inéquations

1 Retour sur les équations vues les années précédentes.

1.1 Rappels sur la technique de base.

Théorème 1 *idée de base*
Dans une équation on peut faire ce que l'on veut pourvu que l'on ***fasse la même chose des deux côtés du signe*** $=$

Exemples 1 *Résoudre l'équation* $x + 3 = 4$ *et l'équation* $2x - 3 = 11$.

x+3=4	
x+3-3=4-3	*je soustrais 3* ***des deux côtés du signe*** *=.*
x=1	*j'effectue les opérations et j'obtiens la valeur de x.*

2x-3=11	
2x-3+3=11+3	*j'ajoute 3* ***de chaque côté du signe*** *=*
2x=14	*j'effectue le calcul*
2x÷2=14÷2	*je divise par 2* ***de chaque côté du signe*** *=*
x=7	*j'obtiens la valeur de x.*

1.2 Utilisation de la technique vue précédemment

Remarque 1 *Quand on résout une équation :*

1. *le but c'est d'obtenir* $x = \ldots$.
2. *pour supprimer une multiplication on effectue une division et réciproquement.*
3. *pour supprimer une addition on effectue une soustraction.*

4. *On résout les problèmes dans l'ordre inverse des priorités, ce n'est pas obligatoire, mais beaucoup plus simple.*

5. *le but c'est d'obtenir* $x = \ldots$.

Exemples 2 *Résoudre les équations suivantes.*

$2 \times x - 3 = 7$
$2 \times x - 3 + 3 = 7 + 3$
$2x = 10$
$2x \div 2 = 10 \div 2$
$x = 5$

$2 \times (x + 8) = 12$
$2 \times (x + 8) \div 2 = 12 \div 2$
$x + 8 = 6$
$x + 8 - 8 = 6 - 8$
$x = -2$

$5 + 3 \times (x - 9) = 26$
$5 + 3 \times (x - 9) - 5 = 26 - 5$
$3 \times (x - 9) = 21$
$3 \times (x - 9) \div 3 = 21 \div 3$
$x - 9 = 7$
$x - 9 + 9 = 7 + 9$
$x = 16$

2 Exploitation des techniques des années précédentes.

Résoudre les équations suivantes : $2x+3 = 5$, $5x+8-2x = 6$, $6x-9 = 3x+5$

Remarque 2 *Dans la deuxième équation on a commencé par simplifier le calcul.*

Dans la troisième équation, on a commencer par réunir tous les termes qui contiennent l'inconnue du même côté du signe =, ensuite on a simplifier e calcul et enfin on a résolu l'équation.

3 Problème concret, mise en équation et résolution.

Pour résoudre un problème avec une équation, on peut procéder de la manière suivante :

1. Tout d'abord on identifie ce que l'on cherche.

2. Ensuite on écrit ce que l'on sait en langage mathématiques, avec une équation.

3. Ensuite on résout l'équation avec la technique vue précédemment.

4. on conclut sur le problème concret de départ.

Exemples 3 *Une maison est rectangulaire. Sa surface est de* $90m^2$*, sa longueur est de* $10m^2$*. Quelle est sa largeur ?*

On cherche la largeur de la maison, appelons la x*.*

On sait que l'aire de la maison est $10 \times x$ *et vaut* 90*.*

On peut donc écrire : $10 \times x = 90$*.*

On résout l'équation $x = 9$*.*

On conclut : la largeur de la maison est 9 m

4 Equation de produit nul.

Définition 1 *Une équation de* ***produit nul*** *c'est une équation qui est écrite comme un produit de facteurs contenant chacun l'inconnue et dont le produit est égal à zéro.*

Exemples 4 $(x+3) \times (x-4) = 0$ *est une équation de produit nul.*

$(9x-8)(3x+8) = 0$ *est une équation de produit nul.*

$(x-2)(x+6)(2x-1) = 0$ *est une équation de produit nul.*

$x^2 - 4 = 0$ *n'a pas l'air d'être une équation de produit nul, cependant on peut remarquer que* $x^2 - 4 = 0$ *c'est pareil que* $(x-2)(x+2) = 0$ *qui est une équation de produit nul.*

Théorème 2 *intégrité de* $\mathbb{R}$*, version officielle*
Si *un produit est nul* ***Alors*** *l'un des deux facteurs est nul.*

Théorème 3 *intégrité de* $\mathbb{R}$*, version compréhensible*
Le seul moyen d'obtenir 0 en multipliant deux nombres c'est que l'un des deux nombres soit égal à 0.

Exemples 5 *Résolution d'équation de produit nul*
$(x+3)(x-7) = 0$

Le seul moyen d'obtenir 0 en multipliant deux nombres ($x+3$ *et* $x-7$ *) c'est* *que l'un de ces deux nombres soit nul, d'après le théorème d'intégrité.*

Donc il y a deux possibilités : soit c'est $x+3$ qui est égal à 0 soit c'est $x-7$.

Si c'est $x+3$ qui est égal à 0	*Si c'est $x-7$ qui est égal à 0*
$x+3=0$	$x-7=0$
$x+3-3=0-3$	$x-7+7=0+7$
$x=-3$	$x=7$

l'équation $(x+3)\times(x-7)=0$ possède donc deux solutions : $x=-3$ et $x=75$

Exemples 6 *le même mais en plus compliqué*
$(x+8)(x-1)(2x+1)=0$

Le seul moyen d'obtenir 0 en multipliant trois nombres ($x+8$ et $x-1$ et $2x+1$) c'est que l'un de ces trois nombres soit nul, d'après le théorème d'intégrité.

Donc il y a trois possibilités : soit c'est $x+8$ qui est égal à 0 soit c'est $x-1$ soit c'est $2x+1$.

Si c'est $x+8$ qui est égal à 0	*Si c'est $x-1$ qui est égal à 0*	*Si c'est $2x+1$ qui est égal à 0*
$x+8=0$	$x-1=0$	$2x+1=0$
$x+8-8=0-8$	$x-1+1=0+1$	$2x+1-1=0-1$
$x=-8$	$x=1$	$2x=-1$
		$2x\div 2=-1\div 2$
		$x=-0,5$

l'équation $(x+8)\times(x-1)\times(2x+1)=0$ possède donc trois solutions : $x=-8$ et $x=1$ et $x=-0,5$.

Exemples 7 *Le même, mais caché*
$x^2=16$ *c'est la même chose que :* $x^2-16=0$ *c'est la même chose que* $(x-4)\times(x+4)=0$.

$(x-4)(x+4)=0$

Le seul moyen d'obtenir 0 en multipliant deux nombres ($x-4$ et $x+4$) c'est que l'un de ces deux nombres soit nul, d'après le théorème d'intégrité.

Donc il y a deux possibilités : soit c'est $x-4$ qui est égal à 0 soit c'est $x+4$.

Si c'est $x-4$ qui est égal à 0	*Si c'est $x+4$ qui est égal à 0*
$x-4=0$	$x+4=0$
$x-4+4=0+4$	$x+4-4=0-4$
$x=+4$	$x=-4$

l'équation $x^2=16$ possède donc deux solutions : $x=4$ et $x=-4$

Exemples 8 *Résoudre les équations de produits nuls suivantes.*
$(x+9)(x-7)=0$
$(2x+8)(3x-1)=0$
$(x+1)(x-1)(2x-6)=0$
$(2x+14)(7x-8)=0$

5 Inéquations.

Définition 2 *Inéquation*
*Une **inéquation** c'est comme une équation sauf que dans une inéquation les deux membres ne sont pas égaux.*

Exemples 9 *Voici des inéquations*
$2x+3\geq 4$

$x-7\leq 9$

Remarque 3 *Une inéquation n'a pas qu'une seule solution. Par exemple les nombres 6 et 7 sont tous les deux solution de l'inéquation $x+3\geq 8$.*

En réalité, une inéquation a, en général, une infinité de solutions.

Théorème 4 *technique de résolution*

*Pour résoudre une inéquation on procède exactement de la même manière que pour une équation **sauf que si l'on multiplie ou que l'on divise les deux côtés de l'inéquation par un même nombre négatif, on doit changer le sens de l'inéquation**.*

Remarque 4 *Quand on résout une inéquation :*

1. *le but c'est d'obtenir $x\geq\ldots$ ou $x\leq\ldots$.*

2. pour supprimer une multiplication on effectue une division et réciproquement ***en se rappelant bien que si c'est par un nombre négatif on change le sens de l'inéquation****.*

3. pour supprimer une addition on effectue une soustraction.

4. On résout les problèmes dans l'ordre inverse des priorités, ce n'est pas obligatoire, mais beaucoup plus simple.

Exemples 10 *résoudre les inéquations suivantes.*

$2 \times x - 3 \leq 7$
$2 \times x - 3 + 3 \leq 7 + 3$
$2x \leq 10$
$2x \div 2 \leq 10 \div 2$
$x \leq 5$

$(-2) \times (x + 8) \geq 12$
$(-2) \times (x + 8) \div 2 \leq 12 \div (-2)$
$x + 8 \leq 6$
$x + 8 - 8 \leq 6 - 8$
$x \leq -2$

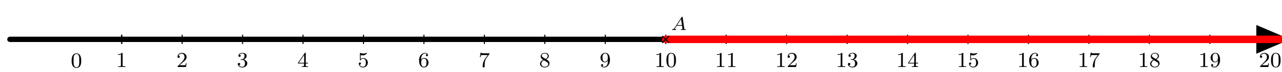
$5 + 3 \times (x - 9) \geq 26$
$5 + 3 \times (x - 9) - 5 \geq 26 - 5$
$3 \times (x - 9) \geq 21$
$3 \times (x - 9) \div 3 \geq 21 \div 3$
$x - 9 \geq 7$
$x - 9 + 9 \geq 7 + 9$
$x \geq 16$

6 Représentation graphique des solutions d'une inéquation.

Définition 3 *On peut représenter graphiquement sur un axe gradué les solutions d'une inéquation.*

Remarque 5 *Résoudre l'inéquation suivante :* $3x - 9 \geq 21$.

Les solutions de cette inéquation ce sont les nombres $x \geq 10$*. On peut remarquer que ce sont tous les nombres qui sont situés à droite de 10 sur une droite graduée.*



La demi-droite rouge représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

De la même manière résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement les solutions.

$3x + 2 \leq 6$
$3 - 2x \geq 8$
$2 \times (x - 5) \leq 6$